ՀՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Փիլիպոսյան Էդուարդ Տիգրանի

ՀԱՏՈՒՄՆԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՒՂԵԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ե.13.05 – "Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրային համալիրներ" մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2013

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ

Пилипосян Эдуард Тигранович

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ТРАССИРОВКИ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
05.13.05 – «Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»

Ереван – 2013

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ. գ. թ. Ի.Ա. Կարապետյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆ.մ. գ. դ. Լ.Ա. Ասլանյան

ֆ.մ. գ. թ. Ն.Կ. Խաչատրյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2013 թ. մայիսի 20-ին, ժամը 16:00-ին ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի 037 «Ինֆորմատիկա և հաշվողական համակարգեր» մասնագիտական խորհրդի նիստում, հետևյալ հասցեով՝ 0014, Երևան, Պ. Սևակի 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2013 թ. ապրիլի 19-ին:

037 մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, ֆ.մ. գ. դ. Հ. Գ. Սարուխանյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском (Славянском) университете

Научный руководитель: к.ф.м.н. И.А. Карапетян

Официальные оппоненты: д.ф.м.н. Л.А. Асланян

к.ф.м.н. Н. К. Хачатрян

Ведущая организация: Ереванский государственный университет

Защита состоится 20-го мая 2013 г. в 16:00 на заседании специализированного совета 037 “Информатика и вычислительные системы” Института проблем информатики и автоматизации НАН РА по адресу: 0014, Ереван, ул. П. Севака 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПИА НАН РА.

Автореферат разослан 19-го апреля 2013 г.

Ученый секретарь специализированного
совета 037, д.ф.м.н. А.Г. Саруханян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Интенсивное развитие вычислительной техники, многократное уменьшение размеров и усовершенствование важнейших характеристик современных электронных устройств достигаются в результате внедрения новых технологий проектирования и конструирования. В этих условиях первостепенное значение приобретает автоматизация процесса проектирования этих устройств и их основных составляющих, в частности, больших и сверхбольших интегральных схем – БИС и СБИС.

Одним из важнейших и трудоемких этапов автоматизации проектирования БИС является этап трассировки соединений, главной задачей которого является проведение соединений, обеспечивающих эквипотенциальность контактов цепей схемы. Существует два уровня трассировки: глобальная трассировка и детальная трассировка. На первом уровне вся область трассировки разбивается на подобласти. Задача глобальной трассировки заключается в распределении соединений по подобластям. Детальная трассировка заключается в реализации соединений в каждой подобласти. Обычно детальная трассировка делится на канальную трассировку и трассировку коробки соединений (switchbox).

Продолжающееся увеличение количества компонент и цепей электрических схем исключает применение «ручных» и переборных методов трассировки, делает практически неприемлемым использование волновых алгоритмов трассировки и предполагает разработку новых, эффективных алгоритмов решения возникающих задач.

Степень автоматизации проектирования и технические характеристики проектируемых устройств во многом зависят как от удачного выбора математической модели их представления, так и от «качества» решения тех математических задач, к которым они сводятся в рамках выбранной модели. В частности, если в качестве математической модели представления схемы выбран гиперграф, то минимизация числа связных между собой пар блоков сводится к построению минимальной реализации гиперграфа. В случае графового представления схемы, задачи трассировки канала и коробки соединений сводятся к нахождению минимальной раскраски и максимального независимого множества вершин соответствующего графа пересечений.

Однако оказывается, что даже в некоторых частных случаях эти задачи являются NP-трудными. Поэтому актуальны как выделение практически важных частных случаев этих задач, для решения которых существуют эффективные точные алгоритмы, так и получение достижимых оценок значений исследуемых параметров. Изучению этих вопросов и посвящена настоящая работа.

Целью работы является исследование различных моделей представления схемы и решение математических задач, возникающих на этапе трассировки интегральных микросхем. В качестве математических моделей исследовались

- Числовые последовательности, в частности вопросы их покрытия возрастающими подпоследовательностями.
- Графы пересечений вписанных в окружность многоугольников, в частности вопросы нахождения в них максимального независимого множества.
- Графы пересечений прямоугольников, в частности вопросы нахождения в них максимального взвешенного независимого множества (МВНМ) вершин.
- Гиперграфы, в частности вопросы построения минимальной реализации специального типа гиперграфов.

Методы исследования. В работе использовались теоретико-множественные и комбинаторные методы исследования графов и гиперграфов, метод динамического программирования, структуры данных, деревья поиска.

Для численного моделирования и наглядного представления решений соответствующих задач были написаны программы с использованием языков C++, C#.

Научная новизна. В диссертационной работе были получены следующие результаты, отличающиеся новизной:

- Задача определения наибольшего числа неконфликтных цепей однослойного канала сведена к нахождению максимального независимого множества вершин графа пересечений вписанных в окружность многоугольников. Для решения этой задачи предложен полиномиальный алгоритм.
- Построен полиномиальный алгоритм разбиения множества двухконтактных цепей канала достаточной ширины на минимальное число частей, трассировка каждой из которых осуществима на одном слое.
- Выделен специальный подкласс графов пересечений прямоугольников (внешнерамочные прямоугольники), и для него доказана полиномиальная разрешимость задачи нахождения МВНМ вершин.
- Построены полиномиальные алгоритмы нахождения МВНМ вершин графов пересечений разных типов внешнерамочных прямоугольников и представлены оценки их сложностей.
- Разработан пакет программ, в котором реализованы предложенные в данной работе алгоритмы.

Практическое значение. Разработанные в работе алгоритмы пригодны для трассировки однослойного канала и коробки соединений, а также нахождения минимального количества слоев, необходимых для трассировки канала.

Созданный на основе результатов диссертации пакет программ может быть использован как в научно-исследовательских и учебных целях, так и при проектировании интегральных схем. На основе разработанных в работе алгоритмов, автором были составлены задачи, которые предлагались на студенческих и школьных олимпиадах по информатике.

Положения, выносимые на защиту:

- Задача трассировки наибольшего числа цепей однослойного канала достаточной ширины, сведена к нахождению максимального независимого множества вершин графа пересечений вписанных в окружность многоугольников. Для решения этой задачи предложен алгоритм сложности $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
- Разработан алгоритм разбиения множества двухконтактных цепей канала достаточной ширины на минимальное число частей, трассировка каждой из которых осуществима на одном слое. Сложность алгоритма $O(n \log\log n)$, где n – количество цепей.
- Для нахождения максимального взвешенного независимого множества (МВНМ) вершин в n-вершинном графе пересечений внешнерамочных прямоугольников предложен алгоритм сложности $O(n^{11})$ и указан способ его применения при трассировке коробки соединений.
- В случае, когда в множестве внешнерамочных прямоугольников однотипные прямоугольники не пересекаются, для нахождения МВНМ представлен алгоритм сложности $O(n^4)$.
- Построена минимальная реализация двух классов полных n-дольных k-униформных гиперграфов.

На основе результатов диссертации создан пакет программ с использованием языков C++, C#, содержащий программную реализацию разработанных алгоритмов.

Апробация работы

Основные результаты и материалы диссертации обсуждались на семинарах кафедры системного программировании Российско-Армянского (Славянского) университета (РАУ), на научном семинаре Института проблем информатики и автоматизации (ИПИА). Основные результаты диссертации докладывались на годичных научных конференциях РАУ 2011, 2012гг и на международной конференции «Математическая логика и приложения» посвященной 80-летнему юбилею И. Д. Заславского (2012 г.).

Публикации

Основные результаты исследований отражены в 7 научных публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы (51 наименование). Основной текст изложен на 116 страницах.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность и практическая значимость темы диссертационной работы, кратко изложено состояние предметной области, сформулированы цели и основные задачи исследования, выделены научные результаты, отличающиеся новизной, научные положения, выносимые на защиту, и практическая ценность полученных результатов.

В первой главе диссертации рассмотрены основные этапы проектирования интегральных микросхем и исследованы соответствующие им математические модели.

В §1.1 приведено описание задач проектирования топологии интегральных микросхем и сформулирована задача трассировки канала. Среди основных составляющих, принимающих участие в конструировании БИС выделим следующие:

- Блоки – функциональные элементы прямоугольной формы, каждый из которых имеет множество своих ножек или контактов (terminals). Контакты являются входами и выходами блока, через которые осуществляется его связь с другими блоками.
- Площадь кристалла – область прямоугольной формы, имеющая свою топологию, на которой размещаются блоки.
- Цепи. Каждая цепь представляет некоторое подмножество множества контактов всех блоков. Контакт не может одновременно принадлежать двум различным цепям.

Основной задачей проектирования топологии БИС является размещение блоков и соединение проводниками пар контактов, с целью обеспечения электрической проводимости (эквипотенциальность) между любыми двумя контактами одной и той же цепи, и полной изоляции любых двух контактов из разных цепей. Проведение таких соединений называется трассировкой.

Будем считать, что размещение блоков имеет некую регулярную структуру, в результате чего образуются ряды блоков. Именно такой подход применяется при проектировании так называемых матричных интегральных схем, когда блоки размещены в виде матрицы. Свободные области между рядами блоков называются каналами. Они также имеют прямоугольную форму, содержат вертикальные и горизонтальные линии, называемыми магистралями, по которым прокладываются проводники, соединяющие контакты блоков. Если не оговорено противное, то канал будем считать горизонтальным, а количество его горизонтальных магистралей назовем шириной канала. В отличие от двухслойных каналов, в которых горизонтальные и вертикальные соединения проводятся на разных его слоях, в работе рассматривается однослойный канал, в котором все соединения проводятся на одном слое (Single Layer Routing). Следовательно, соединения, проводимые для разных цепей, не могут пересекаться.

В §1.2 кроме основных определений и обозначений, представлено содержательное описание двух использованных в диссертационной работе методов: метода динамического программирования и метода представления структуры данных - дерево ван Эмде Боаса.

В §1.3 исследована задача трассировки канала и нахождения минимального количества слоев для трассировки всех цепей.

Задача определения наибольшего числа неконфликтных цепей сведена к задаче определения наибольшего независимого множества вершин в графе пересечений вписанных в окружность многоугольников.

Определение 1.3.1 Прямоугольную решетку $\mathrm{p} \times \mathrm{q}$ вместе с парой векторов $\mathrm{T} = (\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{p})$ и $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_\mathrm{p})$ неотрицательных целых чисел, которые приписаны к вершинам соответственно её верхней и нижней границ, назовем каналом. Мы считаем, что эти числа являются метками соответствующих контактов.

Контакты с одинаковыми положительными метками образуют цепи канала. Подсоединение контактов цепи прокладываемыми по магистралям проводниками, обеспечивающее электрическую проводимость между любыми двумя её контактами, называется трассировкой цепи. Для каждой цепи эти соединения образуют поддерево прямоугольной решетки, висячими вершинами которого являются её контакты. Поддеревья, соответствующие разным цепям, не должны иметь общих вершин. Скажем, что выполнена трассировка канала, если осуществлена трассировка всех его цепей.

Контакты с меткой 0 называются вакантными. Вакантные контакты не принадлежат ни к одной цепи, и поэтому не требуют электрического соединения.

Каждую цепь $\mathrm{C}_\mathrm{i} (\mathrm{i} = 1,2, \ldots, \mathrm{n})$ представим в виде последовательности ее контактов $\mathrm{C}_i = \left(v_1^i v_2^i \ldots v_{k_i}^i u_1^i u_2^i \ldots u_{l_i}^i\right)$, где контакты $v_\mathrm{j}^i (u_\mathrm{j}^i)$ принадлежат верхней (нижней) границе прямоугольной решетки и расположены в порядке слева направо. Для пары контактов x и y, через $\overline{xy}$ обозначим отрезок прямой с концами в этих точках.

Определение 1.3.2 Цепи C_i и C_j назовем конфликтными, если существуют пары контактов $x, y \in C_i$ и $u, w \in C_j$ такие, что отрезки $\overline{xy}$ и $\overline{uw}$ пересекаются и ни один из них не вложен (не является подмножеством) в другой. Канал назовем конфликтным, если он содержит пару конфликтных цепей.

Теорема 1.3.1 Если цепи C_i и C_j конфликтны, то их одновременная трассировка не возможна.

Теорема 1.3.2 Если ширина неконфликтного канала не меньше числа его цепей, то канал является трассируемым.

Если канал содержит конфликтные цепи, то его трассировка не осуществима. Возникает задача выделения наибольшего числа попарно неконфликтных цепей.

Сделаем несколько преобразований и переформулировок. Во-первых, добавив «кривизну», превратим прямоугольную решетку в окружность. Всем контактам будут соответствовать точки на окружности. Их мы пронумеруем начиная с некоторой точки по направлению часовой стрелки, числами $1,2, \ldots, N$. Понятия верхней и нижней грани теряются, а цепям соответствуют последовательности точек. Соединяя последовательно эти точки хордами окружности, получим вписанный в нее многоугольник (если точек две - хорду). Отметим, что через каждую точку проходит точно один такой многоугольник. Неконфликтным цепям будут соответствовать непересекающиеся многоугольники, а конфликтным – пересекающиеся.

Таким образом, из множества вписанных в окружность многоугольников необходимо выбрать наибольшее число попарно непересекающихся. На языке теории графов это эквивалентно нахождению максимального независимого множества вершин в графе пересечений вписанных в окружность многоугольников.

Многоугольник, проходящий через точку с номером i, представим в виде последовательности обхода его вершин по направлению часовой стрелки $X_1^i, X_2^i, \ldots, X_{p_i}^i$, где p_i- число вершин многоугольника, а $X_1^i = i$.

Предложим алгоритм для нахождения максимального числа попарно непересекающихся многоугольников, используя метод динамического программирования.

Обозначим через $\overrightarrow{i,j}$ множество всех точек на окружности, которые встречаются при ее обходе по часовой стрелке от точки i до точки j включительно.

Через $A_{i,j}$ обозначим максимальное количество неконфликтных многоугольников, все вершины которых расположены в точках множества $\overrightarrow{i,j}$.

Заметим, что числа $A_{2,1}, A_{3,2}, \ldots, A_{1,N}$ равны и представляют максимальное количество вписанных в эту окружность попарно непересекающихся многоугольников.

Имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$A_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{если } i = j \\ \max(A_{i+1,j}, A_{X_1^i+1,X_2^i} + A_{X_2^i+1,X_3^i} + \ldots + A_{X_{p_i}^i+1,j} + 1) & \text{если } i \neq j \text{ и } X_1^i, X_2^i, \ldots, X_{p_i}^i \in \overrightarrow{i,j} \\ A_{i+1,j} & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

В работе предлагается также метод восстановления набора номеров соответствующих $A_{1,N}$ многоугольников.

Из приведенного рекуррентного соотношения следует, что для вычисления всех элементов $A_{i,j}$ для многоугольников с фиксированным числом вершин требуется $O(n^2)$ операций. Следовательно, сложность построенного алгоритма – $O(n^2)$, где n– количество многоугольников (цепей).

В §1.4 исследована задача трассировки канала с двухконтактными цепями и нахождения минимального количества слоев для трассировки всех цепей.

Пусть задан канал с векторами $\mathrm{T} = (\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{p})$ и $\mathrm{B} = (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_\mathrm{p})$. Все цепи состоят из двух контактов, один из которых принадлежит верхней границе канала, а другой нижней. Вектора T и B состоят только из нулей и различных положительных чисел. Если из T и B убрать все нули, то полученные вектора T' и B' преобразуются в некоторые перестановки чисел $1,2, \ldots, \mathrm{n}$, где n – количество цепей. Перенумеруем цепи таким образом, чтобы числа в T' слева направо были расставлены по возрастанию, т.е. $1,2, \ldots, \mathrm{n}$. Соответствующим образом изменится и B'. Ясно, что если теперь B' не совпадает с последовательностью $1,2, \ldots, \mathrm{n}$, то трассировку всех цепей невозможно осуществить.

В этом параграфе рассматриваются следующие задачи для канала с вектором B':

Задача 1. Определение наибольшего количества цепей, трассировка которых осуществима на одном слое.

Задача 2. Разбиение множества цепей на минимальное число частей, трассировка каждой из которых осуществима на одном слое.

Задача 3. Для данного числа k вычисление наибольшего количества цепей, канальная трассировка которых осуществима на k слоях, и определение соответствующего распределения цепей по k слоям.

Показывается, что при наличии достаточного количества горизонтальных магистралей, задача 1 эквивалентна нахождению самой длинной возрастающей подпоследовательности B', задача 2 – разложению последовательности B' на минимальное количество возрастающих подпоследовательностей. Известно*, что минимальное количество возрастающих подпоследовательностей, на которые можно разложить данную последовательность, равно длине её самой длинной невозрастающей подпоследовательности. В * предложен также алгоритм сложности O(nlogn) для построения такого разложения. В работе, модифицируя этот алгоритм и применяя структуру данных дерево ван Эмде Боаса,

* Гасфилд Д. Строки, деревья и последовательности в алгоритмах: информатика и вычислительная биология. – СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003.

получен алгоритм сложности $O(n\log\log n)$ для разложения последовательности длины n на минимальное число возрастающих подпоследовательностей.

Относительно задачи 3 доказывается, что, при наличии достаточного числа горизонтальных магистралей, она эквивалентна нахождению k непересекающихся непустых возрастающих подпоследовательностей, которые покрывают наибольшее число членов последовательности B'.

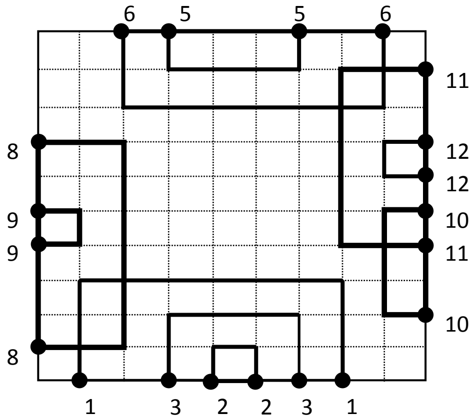


Рис. 1.1. Коробка соединений

Решение этой задачи сводится к нахождению максимального потока минимальной стоимости в специальным образом построенной сети. Сложность полученного алгоритма – $O(k \cdot n^2)$.

В § 1.5 исследуется задача трассировки коробки соединений.

Коробка соединений – прямоугольная решетка размера pxq с горизонтальными и вертикальными магистралями, контакты которой, в отличии от канала, могут находиться на всех её четырех сторонах (границах). Предполагается, что все цепи содержат по два контакта, которые расположены на одной и той же стороне коробки. Каждой цепи соответствует интервал на стороне коробки. Трассировка цепи осуществляется в виде прямоугольника. Трассировка подмножества цепей представляет множество прямоугольников, любые два из которых либо не пересекаются, либо один из них расположен внутри другого.

Для того, чтобы из интервала (цепи) получить прямоугольник, нужно задавать его высоту.

- Всем интервалам, которые не содержат других интервалов, сопоставим число 1 и временно удалим из списка интервалов. Среди остальных также выделим те интервалы, которые не содержат других интервалов и им сопоставим число 2. Продолжая таким образом, каждому интервалу (цепи) будет приписано некоторое натуральное число, следовательно и прямоугольник той же высоты (рис. 1.1), если этот прямоугольник не выходит за рамки коробки соединений, т.е. это число не больше p (или q).
- Множество прямоугольников, любые два из которых либо не пересекаются, либо один из них расположен внутри другого, представляет трассировку соответствующих этим прямоугольникам цепей.

Наибольшее такое множество – это максимальное независимое множество вершин в графе перекрытий $\widetilde{G}$ (overlap graphs) построенных прямоугольников. В [**] предложен полиномиальный алгоритм решения этой задачи, при условии, если имеется такой же алгоритм построения максимального взвешенного множества вершин в соответствующем графе G пересечений (веса вершин определяются в процессе алгоритма из [**]). Решению последней задачи и посвящены 2-3 главы диссертации.

[**] E.Ĉenek and L. Stewart. Maximum independent set and maximum clique algorithms for overlap graphs. Discrete Applied Mathematics, 131(1): 77–91, 2003.

Вторая глава посвящена изучению графов пересечений прямоугольников, в частности задачи нахождения независимого множества максимального веса в графе внешнерамочных прямоугольников в случае непересекающихся однотипных прямоугольников. Эти исследования, а также исследования основной части третьей главы, проводятся с целью решения задачи трассировки коробки соединений, постановка которой и связь с рассматриваемой задачей была сформулирована выше. Она несомненно представляет и определенный теоретический интерес, как практически важный случай NP - трудной задачи.

В §2.1 приведены основные определения и сделан обзор ранее известных результатов.

Пусть на плоскости задано некоторое множество M прямоугольников с параллельными координатным осям сторонами. Граф G_M, множество вершин которого соответствует множеству M, и в котором две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им прямоугольники имеют непустое пересечение, называется графом пересечений M. Подмножество $M_0 \subseteq M$ называется независимым, если пересечение любых двух различных прямоугольников из M_0 пусто. Независимое множество с наибольшим числом элементов, называется максимальным независимым множеством – МНМ (maximum independent set – MIS). Очевидно, что ему соответствует максимальное независимое множество вершин в графе пересечений G_M.

Предположим, что каждому прямоугольнику $r \in M$ приписано некоторое число $w(r) \geq 0$ называемое весом (weight) прямоугольника r. Весом $w(M_0)$ подмножества $M_0 \subseteq M$, называется сумма весов входящих в него прямоугольников, т.е. $w(M_0)= \sum_{r \in M_0} w(r)$. Максимальное взвешенное независимое множество (МВНМ, MWIS) прямоугольников – это независимое множество наибольшего веса.

Задача нахождения максимального независимого множества прямоугольников имеет широкое применение в таких областях, как интеллектуальный анализ данных (data mining) и автоматизация размещения меток (automated label placement).

Задача нахождения МНМ является NP - трудной как для графов вообще, так и для некоторых специальных классов графов пересечений прямоугольников. В частности доказано, что задача является NP - трудной для множества квадратов со стороной равной единице и в случае, когда прямоугольники вырождены в отрезки, параллельные координатным осям.

Имеющиеся до сих пор исследования проводились по направлению разработки приближенных алгоритмов. Известен $O(logn)$ - приближенный алгоритм сложности $O(n\, logn)$ выделения МНМ из n произвольных прямоугольников с параллельными координатным осям сторонами.

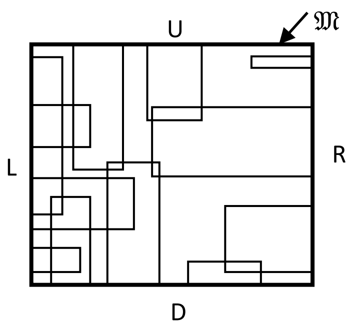


Рис. 2.1. Пример внешнерамочного множества прямоугольников

Определим специальный класс прямоугольников и для него предложим полиномиальный алгоритм построения МВНМ.

Пусть на плоскости задано некоторое множество M прямоугольников с параллельными координатным осям сторонами.

<u>Определение 2.1.1</u> Скажем, что M является венешнерамочным множеством прямоугольников, если существует некоторый большой прямоугольник $\mathfrak{M}$, называемой рамкой множества M, и все прямоугольники из M входят (расположены) в $\mathfrak{M}$ (рис. 2.1), причем точно одна из сторон каждого прямоугольника

из M лежит (опирается) на какой-то стороне рамки $\mathfrak{M}$.

Граф пересечений внешнерамочного множества прямоугольников назовем внешнепрямоугольным графом (outer-rectangle graph). Сторону прямоугольника, которой он опирается на некоторую сторону рамки, назовем его основанием, а перпендикулярную ей сторону – высотой. Стороны рамки обозначим соответственно буквами L, R, U, D.

Введем следующие обозначения. Через $\mathrm{MWIS(M)}$ обозначим некоторое МВНМ прямоугольников из M, а через $\mathrm{mwis(M)}$ – его вес.

<u>Определение 2.1.2</u> Прямоугольники внешнерамочного множества, опирающиеся на одну и ту же сторону его рамки $\mathfrak{M}$, назовем однотипными.

Дальнейший материал работы в основном посвящен разработке полиномиальных алгоритмов построения МВНМ в внешнерамочном множестве взвешенных прямоугольников. В следующих параграфах главы 2 это сделано при дополнительном условии, что никакие два однотипных прямоугольника не пересекаются т.е. пересекающиеся прямоугольники принадлежат различным множествам $\mathrm{M^L, M^R, M^U, M^D}$.

В §2.2 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений в внешнерамочных прямоугольников в двухстороннем случае.

Сначала рассмотрим случай противолежащих прямоугольников. Пусть имеется взвешенное множество M внешнерамочных прямоугольников с рамкой $\mathfrak{M}$, каждый элемент которого опирается на одну из противолежащих сторон рамки: на L или на R.

<u>Лемма 2.2.1</u> Если однотипные прямоугольники из M не пересекаются, то граф пересечений $\mathrm{G_M}$ противолежащих прямоугольников не содержит циклов.

<u>Теорема 2.2.1</u> Если однотипные прямоугольники не пересекаются, то построение МВНМ для двухстороннего случая противолежащих прямоугольников решается за время $\mathrm{O(n)}$, где n – число прямоугольников.

Обратимся к случаю, когда две стороны рамки, на которые опираются прямоугольники, перпендикулярны. Пусть это L и D.

<u>Лемма 2.2.2</u> Левосторонний прямоугольник $l \in M^L$ пересекается с нижним прямоугольником $d \in M^D$ тогда и только тогда, когда пересекаются нижняя сторона l и левая сторона d.

В силу этой леммы левосторонние прямоугольники можно заменить их нижней стороной (отрезком), а нижние прямоугольники – их левой стороной. Веса прямоугольников и соответствующих отрезков будем считать одинаковыми. Графы их пересечений также совпадут. Следовательно, совпадут и максимальные взвешенные независимые множества.

Для каждого нижнего отрезка d_i, через H_i обозначим область, которая справа ограничена этим отрезком, снизу и слева сторонами рамки, а сверху прямой $y = h(d_i)$, где $h(d_i)$ – высота отрезка d_i.

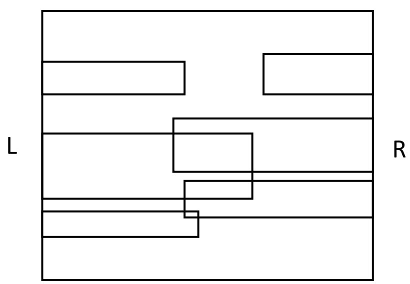


Рис. 2.2. Двухсторонний случай противолежащих прямоугольников - LR

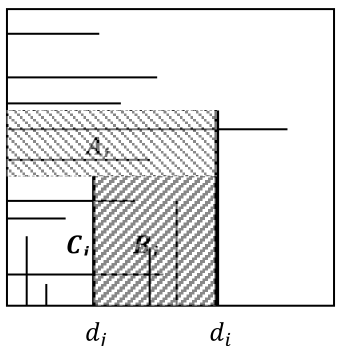


Рис. 2.3. Разбиение области H_i отрезком d_j

Пусть P – некоторая область внутри рамки $\mathfrak{M}$. Через M(P) обозначим множество тех прямоугольников из M, которые полностью содержатся в P, т.е. являются подмножеством области P.

Через $F(i)$ обозначим вес максимального взвешенного независимого множества для $M(H_i)$, т.е $F(i) = mwis(M(H_i))$, где $i = 1,2,\ldots,p+1$. Очевидно, что $F(p+1) = mwis(M)$.

Решения для подзадач соответствующих областям A_j, B_j, C_j независимы друг от друга, и имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$F(i) = w(d_i) + \max\{w(T_i), \max_{\substack{j=1,\ldots,i-1 \\ h(d_j)<h(d_i)}} [\, w(M(A_j)) + w(M(B_j)) + F(j)]\}$$

Мы можем посчитать $F(i)$ в порядке возрастания индексов $F(1), F(2), \ldots, F(p+1)$, используя метод динамического программирования, поскольку $F(i)$ зависит от значения F для меньших индексов.

<u>Теорема 2.2.2</u> Если однотипные прямоугольники не пересекаются, то задача построения МВНМ в двухстороннем случае взаимно перпендикулярных прямоугольников решается за время $O(n^2)$.

В §2.3 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в трехстороннем случае.

Пусть M_0 имеет наибольший вес среди независимых множеств, не содержащих нижних прямоугольников, т.е. $M_0 \cap M^D = \emptyset$. Допустим также, что $M_i \subseteq M (i = 1, 2, \ldots, p)$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, в которых нижним прямоугольником наибольшей высоты является d_i, т.е. если $d_j \in M_i$, и $j \neq i$, то $h(d_j) < h(d_i)$.

<u>Теорема 2.3.1</u>. $mwis(M) = \max_{i=0\ldots p} w(M_i)$, и то множество M_i, на котором достигается этот максимум, является МВНМ в трехстороннем случае.

Итак, задача построения МВНМ в трехстороннем случае сводится к нахождению множеств $M_0, M_1, \ldots, M_p$. Так как $M_0 \subseteq M^L \cup M^R$, то имеем дело с двухсторонним случаем противолежащих прямоугольников, оптимальное решение $M_0 = MWIS(M^L \cup M^R)$ которого, согласно теореме 2.2.1, можно построить за время $O(n)$.

Построим множества $M_i (i = 1, \ldots, p)$. Прямоугольник d_i разбивает рамку $\mathfrak{M}$ на три непересекающиеся прямоугольника A_i, B_i и C_i (рис. 2.4). Ни один из нижних прямоугольников $d_j \in M_i$ не пересекается с A_i, так как d_i имеет самую большую высоту в $M_i \cap M^D$. Так как прямоугольники, опирающиеся на одну и ту же сторону рамки не пересекаются, то в M может быть не более одного прямоугольника $a \in M^L$, который пересекается и с C_i, и с A_i, и не более одного прямоугольника $b \in M^R$, который пересекается как с A_i, так и с B_i. Причем, если даже такие прямоугольники a и b существуют, то они могут принимать участие в M_i, могут и не принимать. Перебирая эти варианты для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$ и для каждого из четырех подмножеств множества $\{a, b\}$, построим следующие множества.

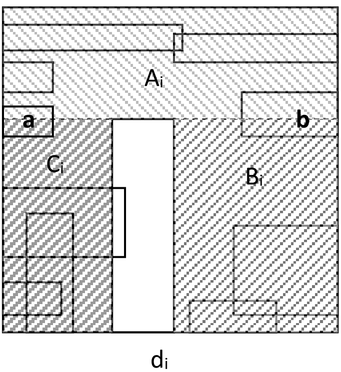


Рис. 2.4. d_i самый высокий нижний прямоугольник в M_i

$$M_i^0 = \{d_i\} \cup MWIS(M(C_i)) \cup MWIS(M(B_i)) \cup MWIS(M(A_i))$$

$M_i^a = \{d_i\} \cup MWIS(M(C_i - a)) \cup \{a\} \cup MWIS(M(A_i - a)) \cup MWIS(M(B_i))$
$M_i^b = \{d_i\} \cup MWIS(M(C_i)) \cup MWIS(M(A_i - b)) \cup \{b\} \cup MWIS(M(B_i - b))$
$M_i^{ab} = \{d_i\} \cup MWIS(M(C_i - a)) \cup MWIS(M(A_i - (a \cup b))) \cup MWIS(M(B_i - b)) \cup \{a\} \cup \{b\}$

Все эти множества строятся за время $O(n^2)$.

Из построенных четырех независимых множеств определим множество с наибольшим весом.

$$\max(w(M_i^0), w(M_i^a), w(M_i^b), w(M_i^{ab}))$$

Положим M_i равным тому из этих четырех множеств, на котором достигается максимум. Таким образом, построим все множества $M_0, M_1, \dots, M_p$ выполнив при этом порядка $p \cdot n^2$ операций. Поскольку $p \leq n$, то сложность алгоритма - $O(n^3)$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.2 Если однотипные прямоугольники не пересекаются, то задача построения МВНМ в трехстороннем случае решается за время $O(n^3)$.

В §2.4 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в общем случае.

Определение 2.4.1 Пару непересекающихся вертикальных прямоугольников $d_i \in M^D$ и $u_j \in M^U$ назовем псевдопересекающимися, если пересекаются их проекции на оси OY. Скажем также, что они образуют вертикальную псевдопару. Аналогично, непересекающиеся горизонтальные прямоугольники $l_i \in M^L$ и $r_j \in M^R$, проекции которых на оси OX пересекаются, также являются псевдопересекающимися и образуют горизонтальную псевдопару.

Независимое множество прямоугольников, не может одновременно содержать и горизонтальную и вертикальную псевдопару, поскольку, в противном случае, какие-то два из этих четырех прямоугольников пересеклись бы. Так что, любое МВНМ либо не содержит горизонтальную псевдопару (вертикальную оно может и содержать), либо не содержит вертикальную псевдопару.

Ниже мы предложим алгоритм сложности $O(n^4)$, который среди независимых множеств, не содержащих вертикальную псевдопару, выделяет некоторое независимое множество наибольшего веса. По соображениям симметрии, с помощью этого же алгоритма можем выделить такое же множество и среди независимых множеств, не содержащих горизонтальную псевдопару. То из этих множеств, вес которого больше и будет искомым максимальным взвешенным независимым множеством.

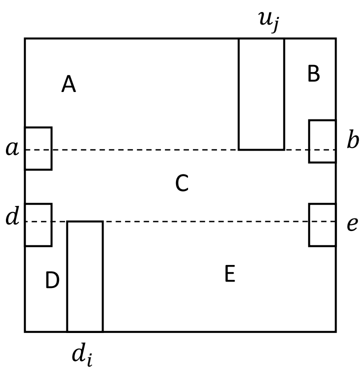


Рис. 2.5. $d_i \in M^D$ и $u_j \in M^U$ самые высокие прямоугольники в $\widetilde{M}$

Пусть $\widetilde{M}$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, не содержащих псевдопересекающихся прямоугольников. Отметим в $\widetilde{M}$ самые высокие прямоугольники $d_i \in M^D$ и $u_j \in M^U$. Так как d_i и u_j не являются псевдопересекающимися, то в $\mathfrak{M}$ выделяются части A, B, C, D, E (рис.2.5), причем, нижние и верхние прямоугольники из $\widetilde{M}$ с C не пересекаются.

Поскольку однотипные прямоугольники не пересекаются, то в M^L может быть не более одного прямоугольника $a \in M^L$, пересекающегося и с A, и с C, и не более одного прямоугольника $d \in M^L$, пересекающегося и с C, и с D. Аналогично в M^R может быть не более одного прямоугольника

$b \in M^R$ пересекающегося и с B, и с C, и не более одного прямоугольника $e \in M^R$, пересекающегося и с C и с E.

Пусть $T \subseteq \{a, b, d, e\}$, а K – множество точек плоскости, принадлежащих хотя бы одному прямоугольнику из T. Очевидно, что, если $T = \emptyset$, то $K = \emptyset$.

Построим независимое множество M_T, которое содержит d_i, u_j, все прямоугольники T, и среди таких независимых множеств имеет наибольший вес.

$$M_T = \{d_i\} \cup \{u_j\} \cup T \cup MWIS(M(A-K)) \cup MWIS(M(B-K)) \cup MWIS(M(C-K)) \cup MWIS(M(D-K)) \cup MWIS(M(E-K))$$

$$w(M_T) = w(d_i) + w(u_j) + w(T) + mwis(M(A-K)) + mwis(M(B-K)) + mwis(M(C-K)) + mwis(M(D-K)) + mwis(M(E-K))$$

Поскольку все множества $M(A-K)$, $M(B-K)$, $M(C-K)$, $M(D-K)$, $M(E-K)$ представляют двухсторонний случай, то для любой пары d_i, u_j, и для любого $T \subseteq \{a, b, d, e\}$, вес $w(M_T)$ можно вычислить за время $O(n^2)$. Так как пар d_i, u_j не более n^2, а подмножеств не больше 16-и, то общее количество выполненных операций будет не больше $O(n^4)$.

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 2.4.1 Если однотипные прямоугольники не пересекаются, то задача построения МВНМ в четырехстороннем (общем) случае решается за время $O(n^4)$.

Третья глава посвящена изучению задачи нахождения независимого множества максимального веса в графе внешнерамочных прямоугольников. В этой главе мы предложим полиномиальный алгоритм построения MWIS(M) для всех i - сторонних случаев ($i = 1, 2, 3, 4$), без накладывании принятого в главе 2 дополнительного условия, т.е. односторонние прямоугольники могут пересекаться. Сложности предложенных алгоритмов обозначим через $\varphi^i(n)$, где n – число прямоугольников, $i = 1, 2, 3, 4$. Будем использовать также обозначение типа $\varphi^{LD}(n)$, для сложности алгоритма в двухстороннем случае перпендикулярных прямоугольников.

В §3.1 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в двустороннем случае взаимноперпендикулярных прямоугольников – LD.

Итак, $M^L = \{l_1, l_2, \ldots, l_q\}$, $M^D = \{d_1, d_2, \ldots, d_p\}$, где в M^L прямоугольники расположены в порядке возрастания ординат нижних сторон, а в M^D – абсцисс левых сторон.

Добавим также прямоугольники нулевого веса d_{p+1}, расположенный правее и выше всех нижних прямоугольников, и l_{q+1} – выше и длиннее всех левосторонних, как это показано на рис. 3.1

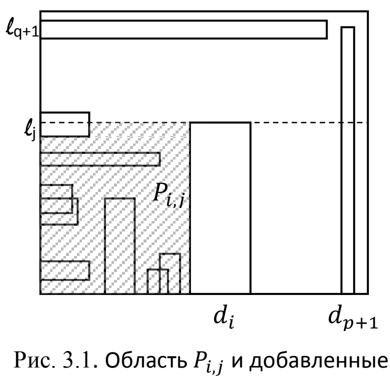


Рис. 3.1. Область $P_{i,j}$ и добавленные прямоугольники ℓ_{q+1}и d_{p+1}

Для любого $d_i \in M^D, i = 1 \ldots p+1$, через $L(d_i) \subseteq M^L$ обозначим множество непересекающихся с d_i прямоугольников, через которые проходит прямая $y = h(d_i)$. Очевидно, что $L(d_{p+1}) = \{l_{q+1}\}$.

Пусть $i \in \{1, \ldots, p+1\}$, $j \in \{1, \ldots, q+1\}$ и $l_j \in L(d_i)$. Через $M[i][j]$ обозначим независимое множество наибольшего веса, выбранное из прямоугольников $l_1, \ldots, l_j, d_1, \ldots, d_i$, содержащее l_j и d_i, причем d_i в нем является самым высоким нижним прямоугольником. Положим также $w(M[i][j]) = LD[i][j]$

Если через $P_{i,j}$ обозначить заштрихованную область на рис. 3.1, то имеем

$$M[i][j] = MWIS\left(M(P_{i,j})\right) \cup \{d_i, l_j\}, \quad LD[i][j] = mwis\left(M(P_{i,j})\right) + w(d_i) + w(l_j)$$

Ясно также, что $mwis(M) = LD[p+1][q+1]$

Для решения задачи построения MWIS(M) применяется метод динамического программирования, определяется связь (рекуррентное соотношение), сводящая решение задачи большого размера к меньшим.

<u>Теорема 3.1.1</u> Задача нахождения МВНМ в двухстороннем случае перпендикулярных внешнерамочных прямоугольников решается за время $O(n^5)$.

В §3.2 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в двустороннем случае противолежащих прямоугольников – DU.

Сначала решается задача построения независимого множества наибольшего веса $\widetilde{M}$, не содержащего псевдопересекающихся прямоугольников.

Для любого нижнего прямоугольника $d_k \in M^D, k = 1, \dots, p$, через M_k^D обозначим множество тех прямоугольников из M^D, высота которых не больше $h(d_k)$, а через M_k^U – множество тех прямоугольников из M^U, которые не пересекаются с прямой $y = h(d_k)$.

Будем считать, что $M_0^D = \emptyset$, $M_0^U = M^U$, $M_{p+1}^D = M^D$, $M_{p+1}^U = \emptyset$.

Пусть $d_t \in \widetilde{M}$ является самым высоким в $\widetilde{M}$ нижним прямоугольником. Поскольку $\widetilde{M}$ не содержит псевдопересекающихся прямоугольников, следовательно, $\widetilde{M} \cap M^D \subseteq M_t^D$ и $\widetilde{M} \cap M^U \subseteq M_t^U$.

$$w(\widetilde{M}) = w(\widetilde{M} \cap M^D) + w(\widetilde{M} \cap M^U) \le mwis(M_t^D) + mwis(M_t^U) \le \max_{k=0,\dots,p+1}\left(mwis(M_k^D) + mwis(M_k^U)\right)$$

Но, так как $\widetilde{M}$ является независимым множеством наибольшего веса, значит $w(\widetilde{M}) = \max_{k=0,\dots,p+1}\left(mwis(M_k^D) + mwis(M_k^U)\right)$.

Поскольку $mwis(M_k^D)$ и $mwis(M_k^U)$ вычисляются за линейное время и $p \le n$, то сложность алгоритма вычисления веса наибольшего независимого множества без псевдопересекающихся прямоугольников в случае UD равно $O(n^2)$.

Далее решается задача построения независимого множества наибольшего веса, содержащего псевдопересекающиеся прямоугольники.

Рассмотрим вертикальную пару псевдопересекающихся прямоугольников $d_i \in M^D$ и $u_j \in M^U$. Расположенную между ними заштрихованную область (рис. 3.2) назовем коридором между u_j и d_i и обозначим через K_i^j. Расстоянием между u_j и d_i назовем ширину

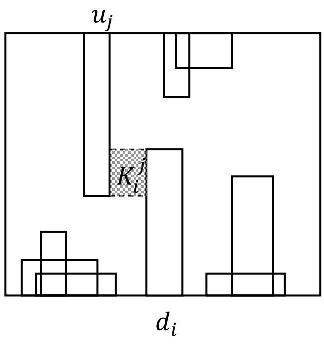


Рис. 3.2. Псевдопара d_i, u_j и коридор K_i^j

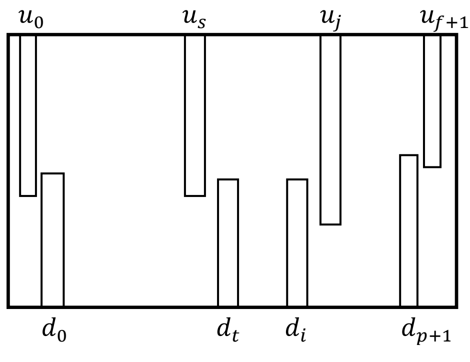


Рис. 3.3. Псевдопересекающийся пары d_i, u_j d_t, u_s и добавленные прямоугольники $d_0, u_0, d_{p+1}, u_{f+1}$

коридора K_i^j (на рис. 3.2 - это расстояние между правой стороной u_j и левой стороной d_i).

Пусть независимое множество максимального веса $\widetilde{M}$ содержит пару псевдопересекающихся прямоугольников u_j, d_i. Скажем, что u_j и d_i составляют тупиковую псевдопару в $\widetilde{M}$, если ни один из прямоугольников принадлежащих $\widetilde{M}$ не пересекается с коридором K_i^j.

<u>Лемма 3.2.1</u> Если независимое множество $\widetilde{M}$ содержит пару псевдопересекаюшихся прямоугольников, то оно содержит и тупиковую псевдопару.

Добавим новые пары псевдопересекающихся прямоугольников нулевого веса $u_0\ d_0$ и $u_{f+1}\ d_{p+1}$, расстояние между прямоугольниками которых равно заранее выбранному достаточно малому числу $\varepsilon > 0$ (рис. 3.3).

Пусть независимое множество $M[i][j]$ имеет наибольший вес среди независимых множеств образованных из прямоугольников $d_0, \dots, d_i, u_0, \dots, u_j$, в которых прямоугольники $u_j\ d_i$ участвуют и образуют тупиковую псевдопару. Вес $M[i][j]$ обозначим через $DU[i][j]$. Очевидно, что $DU[0][0] = 0$, а $DU[p+1][f+1]$ из себя представляет вес максимального взвешенного независимого множества.

Пусть в множестве $M[i][j] \setminus \{d_i, u_j\}$ пара $u_s\ d_t$ является самой правой тупиковой псевдопарой. Существование такой пары следует из леммы 3.2.1 с учетом добавленных прямоугольников d_0, u_0. Значит, в множестве $M[i][j] \setminus \{M[t][s] \cup \{u_j\} \cup \{d_i\}\}$ не имеется пара псевдопересекающихся прямоугольников.

Через A^*обозначим независимое множество наибольшего веса, выбранное из тех прямоугольников $u_{s+1}, \dots, u_{j-1}, d_{t+1}, \dots, d_{i-1}$, которые не пересекаются с прямоугольниками u_j, u_s, d_i, d_t, с коридорами K_i^j и K_t^s, и которое (A^*) не содержит пар псевдопересекающихся прямоугольников.

$$DU[i][j] = w(d_i) + w(u_j) + max(w(A^*) + DU[t][s]),$$

Где максимум берется по всем таким значениям s и t ($s = 0, \dots, j-1\ \ t = 0, \dots, i-1$), для которых прямоугольники u_s и d_t образуют псевдопару и не пересекаются с прямоугольниками d_i, u_j и с коридором K_i^j. Как доказано в 2.1, $w(A^*)$ вычисляется за время $O(n^2)$. Так как $s \le i \le n$ и $t \le j \le n$, то каждое число $DU[i][j]$ вычисляется за время $O(n^4)$, а вся матрица $DU[i][j]$ – за $O(n^6)$. Значит, $\varphi^{UD}(n) = O(n^6)$.

<u>Теорема 3.2.2</u> Задача нахождения МВНМ в двухстороннем случае противолежащих внешнерамочных прямоугольников решается за время $O(n^6)$.

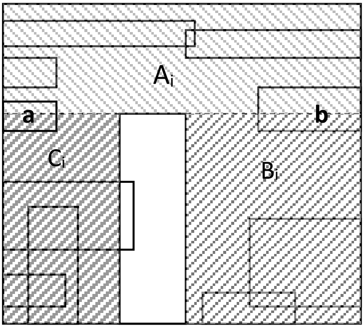
<u>Следствие 3.2.1</u> $\varphi^2(n) = \max\left(O(n^5), O(n^6)\right) = O(n^6)$

В §3.3 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в трехстороннем случае.

Пусть $\mathrm{M_0}$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, не содержащих нижних прямоугольников, т.е. $\mathrm{M_0} \cap M^D = \emptyset$. Допустим также, что $\mathrm{M_i} \subseteq \mathrm{M}(\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{p})$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, в которых нижним прямоугольником самой большой высоты является d_i, т.е. если $d_j \in M_i$, и $j \neq i$, то $h(d_j) < h(d_i)$.

<u>Теорема 3.3.1</u> $\mathrm{mwis(M)} = \max\limits_{\mathrm{i=0\dots p}} \mathrm{w(M_i)}$, и то множество $\mathrm{M_i}$, на котором достигается этот максимум, является МВНМ в трехстороннем случае.

Итак, задача построения МВНМ в трехстороннем случае сводится к нахождению множеств $\mathrm{M_0, M_1, \dots, M_p}$. Так как $\mathrm{M_0} \subseteq \mathrm{M^L} \cup \mathrm{M^R}$, то имеем дело с двухсторонним случаем LR, и $w(\mathrm{M_0})$ можно посчитать за время $\mathrm{O(n^6)}$.



d_i

Рис. 3.4. Разбиение рамки нижним прямоугольником d_i

Построим множества M_i ($i = 1, 2, \dots, p$). Прямоугольник d_i разбивает рамку $\mathfrak{M}$ (рис. 3.4) на три непересекающихся прямоугольника A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, \dots, p$) . Ни один из нижних прямоугольников d_j принадлежащих M_i не пересекается с A_i, так как d_i имеет самую большую высоту в $M_i \cap M^D$. Аналогично определению $L(d_i)$, через $R(d_i)$ обозначим множество непересекающихся с d_i правосторонних прямоугольников, через которые проходит прямая $y = h(d_i)$, где $i = 1,2, \dots, p$.

Через $M_i^{a,b}$ обозначим независимое множество наибольшего веса, в котором принимают участие a – тый прямоугольник $\tilde{l}_a^i$ из $L(d_i)$ и b – тый прямоугольник $\tilde{r}_b^i$ из $R(d_i)$, где $a = 0, 1, \dots;\ b = 0, 1, \dots;\ i = 1, \dots, p$.

$$\mathrm{M_i^{ab}} = \{\mathrm{d_i}\} \cup \mathrm{MWIS}\left(\mathrm{M}\left(\mathrm{C_i} - \tilde{l}_a^i\right)\right) \cup \mathrm{MWIS}\left(\mathrm{M}\left(\mathrm{A_i} - (\tilde{l}_a^i \cup \tilde{r}_b^i)\right)\right) \cup \mathrm{MWIS}(\mathrm{M}\left(\mathrm{B_i} - \tilde{r}_b^i\right)) \cup \{\tilde{l}_a^i, \tilde{r}_b^i\}$$

Ясно, что $\mathrm{M}\left(\mathrm{C_i} - \tilde{l}_a^i\right) \subseteq \mathrm{M^L} \cup \mathrm{M^D}$, $\mathrm{M}\left(\mathrm{B_i} - \tilde{r}_b^i\right) \subseteq \mathrm{M^R} \cup \mathrm{M^D}$, $\mathrm{M}\left(\mathrm{A_i} - (\tilde{l}_a^i \cup \tilde{r}_b^i)\right) \subseteq \mathrm{M^R} \cup \mathrm{M^L}$. Все эти множества представляют двухсторонние случаи и для них $MWIS$ можно построить за время $O(n^6)$. Итак $M_i^{a,b}$ можно построить за время $O(n^6)$.

Итак, $w(M_i) = \max\limits_{\substack{a=0,1,\dots \\ b=0,1,\dots}} w(M_i^{a,b})$. Так как $a \le n$ и $b \le n$, то время вычисления $w(M_i)$ равно $O(n^8)$, где $\mathrm{i} = 1, 2, \dots p$. Учитывая, что $p \le n$ и теорему 3.3.1 получим, что $\varphi^3(n) = O(n^9)$.

Теорема 3.3.2 Задача нахождения МВНМ в трехстороннем случае внешнерамочных прямоугольников решается за время $O(n^9)$.

В §3.4 рассматривается задача выделения независимого множества максимального веса в графе пересечений внешнерамочных прямоугольников в общем случае.

Заметим, что независимое множество прямоугольников не может одновременно содержать и горизонтальную, и вертикальную пару псевдопересекающихся прямоугольников. Так что, любое независимое множество $\widetilde{\mathrm{M}}$ прямоугольников может быть одного из следующих типов:

а) $\widetilde{\mathrm{M}}$ содержит вертикальную псевдопару, но не содержит горизонтальную псевдопару.

б) $\widetilde{\mathrm{M}}$ содержит горизонтальную псевдопару, но не содержит вертикальную псевдопару.

в) $\widetilde{\mathrm{M}}$ не содержит псевдопару, ни горизонтальную, ни вертикальную.

Очевидно, что максимальным независимым множеством в общем случае будет то множество, которое имеет наибольший вес среди максимальных независимых множеств типов а), б), в). Поскольку по соображениям симметрии б) сводится к а), мы обсудим только типы а) и в).

Сначала построим независимое множество наибольшего веса, содержащее пару вертикальных псевдопересекающихся прямоугольников. Пусть $\widetilde{\mathrm{M}}_1 \subseteq \mathrm{M}$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, содержащих псевдопересекающиеся прямоугольники, а $\mathrm{d_i}$ и $\mathrm{u_j}$ соответствующая пара самых близких друг к другу псевдопересекающихся прямоугольников из $\widetilde{\mathrm{M}}_1$ (рис. 3.5).

$$w\left(\widetilde{\mathrm{M}}_1\right) = \mathrm{w(d_i)} + \mathrm{w}\left(\mathrm{u_j}\right) + \mathrm{w}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_1(\mathrm{A})\right) + \mathrm{w}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_1(\mathrm{B})\right)$$

$$\mathrm{w}\left(\widetilde{\mathrm{M}}_1(\mathrm{A})\right) = \mathrm{mwis}\left(\mathrm{M(A)}\right), \ w\left(\widetilde{\mathrm{M}}_1(\mathrm{B})\right) = \mathrm{mwis}(\mathrm{M(B)})$$

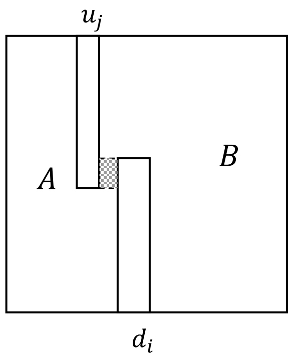


Рис. 3.5. Псевдопара $\mathrm{d_i}, \mathrm{u_j}$ и области A, B

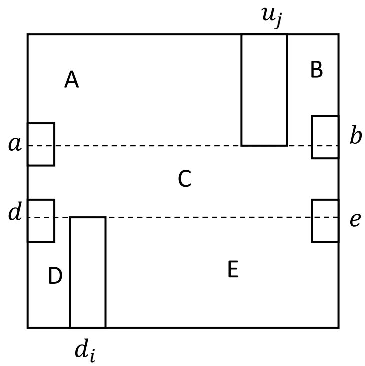


Рис. 3.6. $\mathrm{d_i} \in \mathrm{M^D}$ и $\mathrm{u_j} \in \mathrm{M^U}$ самые высокие прямоугольники в $\widetilde{\mathrm{M}}$

$\mathrm{M(A)}$ и $\mathrm{M(B)}$ представляют трехсторонний случай и для вычисления $\mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(A)}\big)$ и $\mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(B)}\big)$, в §3.3 был предложен алгоритм сложности $\mathrm{O(n^9)}$.

Посчитав суммы $w(\mathrm{d}_i) + \mathrm{w(u_j)} + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(A)}\big) + \mathrm{mwis(M(B))}$ для всех вертикальных псевдопар и выбрав наибольшее среди них, получим множество $\widetilde{\mathrm{M}}_1$. Поскольку количество таких пар не больше $\mathrm{n^2}$, то общее число операций будет $\mathrm{O(n^{11})}$.

Теперь построим независимое множество наибольшего веса, не содержащее псевдопересекающихся прямоугольников. Пусть $\widetilde{\mathrm{M}}_2$ имеет наибольший вес среди независимых множеств, не содержащих псевдопересекающихся прямоугольников. Отметим в $\widetilde{\mathrm{M}}_2$ самые высокие прямоугольники $\mathrm{d_i} \in \mathrm{M^D}$ и $\mathrm{u_j} \in \mathrm{M^U}$. Так как $\mathrm{d_i}$ и $\mathrm{u_j}$ не являются псевдопересекающимися, то в $\mathfrak{M}$ выделяются части $\mathrm{A, B, C, D, E}$ (рис. 3.6), причем нижние и верхние прямоугольники из $\widetilde{\mathrm{M}}_2$ с C не пересекаются.

Через M^L_{AC} обозначим подмножество тех прямоугольников из M^L, которые не пересекаются ни с $\mathrm{d_i}$, ни с $\mathrm{u_j}$, но пересекаются и с областью A, и с областью C. Аналогично определяются множества $M^L_{DC}, M^R_{BC}, M^R_{\mathrm{E}C}$.

Через T обозначим всех тех прямоугольников из этих множеств, которые принадлежат $\widetilde{\mathrm{M}}_2$. T содержит не более четырех элементов и является подмножеством некоторого множества $\{a, b, d, e,\}$, где $a \in M^L_{AC},\ d \in M^L_{DC},\ e \in M^R_{\mathrm{E}C}$ и $b \in M^R_{BC}$.

Построим независимое множество $\mathrm{M_T}$, которое содержит d_i, u_j, все прямоугольники T, и среди таких независимых множеств имеет наибольший вес.

$$\mathrm{M_T} = \{\mathrm{d_i}\} \cup \{\mathrm{u_j}\} \cup \mathrm{T} \cup \mathrm{MWIS}\big(\mathrm{M(A-K)}\big) \cup \mathrm{MWIS}\big(\mathrm{M(B-K)}\big) \cup \mathrm{MWIS}\big(\mathrm{M(C-K)}\big) \cup \mathrm{MWIS}\big(\mathrm{M(D-K)}\big) \cup \mathrm{MWIS}\big(\mathrm{M(E-K)}\big)$$

$$w(\mathrm{M_T}) = \mathrm{w(d_i)} + \mathrm{w(u_j)} + w(T) + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(A-K)}\big) + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(B-K)}\big) + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(C-K)}\big) + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(D-K)}\big) + \mathrm{mwis}\big(\mathrm{M(E-K)}\big)$$

Получается, что $w(M_T) = w(\widetilde{\mathrm{M}}_2)$ и можно взять $\widetilde{\mathrm{M}}_2 = M_{\mathrm{T}}$. Искомое $MWIS(M)$ будет равно тому из множеств $\widetilde{\mathrm{M}}_1$ и $\widetilde{\mathrm{M}}_2$, вес которого больше.

Теорема 3.4.1 Задача нахождения МВНМ для любого множества внешнерамочных прямоугольников решается за время $O(n^{11})$.

В §3.5 изучается задача нахождения максимального независимого множества параллелепипедов. Рассмотрим аналог (обобщение) задачи построения МНМ прямоугольников в трехмерном пространстве. Пусть в трехмерном пространстве задано некоторое множество P параллелепипедов с параллельными координатным осям сторонами.

Подмножество $P_0 \subseteq P$ называется независимым, если пересечение любых двух различных параллелепипедов из P_0 пусто. Независимое множество с наибольшим числом элементов называется максимальным независимым множеством – МНМ.

Пусть в трехмерном пространстве задано некоторое множество P параллелепипедов с параллельными координатным осям сторонами.

Определение 3.5.1 Скажем, что P является внешнекоробочным множеством параллелепипедов, если существует некоторый большой параллелепипед $\mathfrak{M}$, называемый коробкой, и все параллелепипеды из P входят (расположены) в $\mathfrak{M}$, причем точно одна грань каждого параллелепипеда из P лежит (опирается) на какой-то грани коробки $\mathfrak{M}$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 3.5.1 Задача нахождения максимального независимого множества внешне-коробочных параллелепипедов является NP-трудной.

В §3.6 выбрана другая модель представлении схемы – гиперграф.

Гиперграф назовем k-униформным, если мощности всех его ребер равны заданному числу k, т.е. для любого $\mathrm{E} \in \mathcal{E}, |\mathrm{E}| = \mathrm{k}$.

n-вершинный гиперграф, множество ребер которого образовано из всех k-элементных подмножеств множества его вершин, обозначим через $\mathrm{H}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$ и назовем полным k-униформным гиперграфом.

Пусть $\mathrm{n}, \mathrm{k}, \mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n}$ некоторые натуральные числа, где $\mathrm{n} \geq 3,\ 2 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n},\ \mathrm{p}_\mathrm{i} \geq 1,\ \mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$. Допустим, что $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n}$ попарно непересекающиеся непустые множества, где $\mathrm{X} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{X}_\mathrm{i},\ |\mathrm{X}_\mathrm{i}| = \mathrm{p}_\mathrm{i}$, $\mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$.

Через $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ обозначим гиперграф с множеством вершин X, в котором $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{X}$ является ребром тогда и только тогда, когда $|\mathrm{E}| = \mathrm{k}$ и $|\mathrm{X}_\mathrm{i} \cap \mathrm{E}| \leq 1$, для всех $\mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$. $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ назовем полным n-дольным k-униформным гиперграфом. Если $\mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_2 = \dots = \mathrm{p}_\mathrm{n} = \mathrm{p}$, то $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ назовем p-уравновешенным и обозначим через $\mathrm{H}_\mathrm{n}^{\mathrm{k},\mathrm{p}}$. При $\mathrm{p} = 1$, то $\mathrm{H}_\mathrm{n}^{\mathrm{k},\mathrm{p}}$ совпадает (изоморфен) с полным k-униформным гиперграфом $\mathrm{H}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$.

Пусть на множестве вершин X заданы гиперграф $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathcal{E})$ и граф $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$.

Определение 3.5.1 . Граф G называется реализацией гиперграфа H, если для любого ребра $\mathrm{E} \in \mathcal{E}$ гиперграфа H, подграф $< \mathrm{E} >_\mathrm{G}$ графа G, порожденный множеством вершин $\mathrm{E} \subset \mathrm{X}$, является связным.

Реализацию гиперграфа H , содержащую минимальное число ребер, назовем минимальной реализацией, а число его ребер обозначим через $\mathrm{R}(\mathrm{H})$.

Определение 3.6.2 Реализацию $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{U})$ гиперграфа $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ назовем компактным, если оттого, что в G вершины $\mathrm{x} \in \mathrm{X}_\mathrm{i}$ и $\mathrm{y} \in \mathrm{X}_\mathrm{j}$, где $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$, соединены ребром, следует, что в G ребром соединены любые две вершины из X_i и X_j .

Теорема 3.6.1 Любой гиперграф $H^k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ имеет компактную минимальную реализацию.

Эта теорема дает представление о структуре минимальных реализаций полных n-дольных k-униформных гиперграфов и ниже, в некоторых случаях нам удается их построить. Гиперграфу $\mathrm{H}^\mathrm{k}(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{n})$ сопоставим взвешенный полный граф $\widetilde{\mathrm{K}}_\mathrm{n}$ следующим образом. Каждому множеству X_i сопоставим вершину $\mathrm{v}_\mathrm{i}, \mathrm{i} \in \overline{1, \mathrm{n}}$. Вершине v_i припишем вес p_i , а ребру $\mathrm{u}_{\mathrm{i},\mathrm{j}} = (\mathrm{v}_\mathrm{i}, \mathrm{v}_\mathrm{j})$ – вес $\beta(\mathrm{u}_{\mathrm{i},\mathrm{j}}) = \mathrm{p}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{p}_\mathrm{j}$. Весом подграфа $\widetilde{\mathrm{K}}_\mathrm{n}$ будем считать сумму весов его ребер.

Теорема 3.6.2 При $k = n$ построение минимальной реализации $H^k(X_1, X_2, \dots, X_n)$ сводиться к нахождению минимального остовного дерева взвешенного графа $\widetilde{K}_n$.

Теорема 3.6.3 $R\left(H_n^{k,p}\right) = p^2 \cdot \left]\frac{n(n-k+1)}{2}\right[$

Установлен так же метод построения соответствующих минимальных реализаций.

В четвертой главе диссертации описывается программный пакет, созданный на основе полученных в главах 1-3 теоретических результатов.

Пакет состоит из двух основных частей.

1. Программа SLCRouter (Single layer channel router) – графическая программа для проведения трассировки однослойного канала.
2. Библиотека VML (VLSI Model Library) – для работы с различными моделями представления объектов, применяемых при проектировании СБИС.

В §4.1 описывается программа SLCRouter. Для трассировки однослойного канала с достаточным количеством горизонтальных магистралей, разработана графическая программа на языке C#. Программа предоставляет графический интерфейс создания и изображения канала (прямоугольной решетки), на верхней и нижней границе которого можно задавать контакты и множество цепей (рис. 4.1).

В результате работы программа проводит трассировку максимального количества цепей. Так же параллельно изображается множество вписанных в окружность многоугольников и среди них указывается максимальное независимое множество.

Программа использует алгоритм MIS_Polygons, предложенный в §1.3, для определения максимального количества неконфликтных цепей и теорему 1.3.2 для трассировки всех неконфликтных цепей (рис. 4.1).

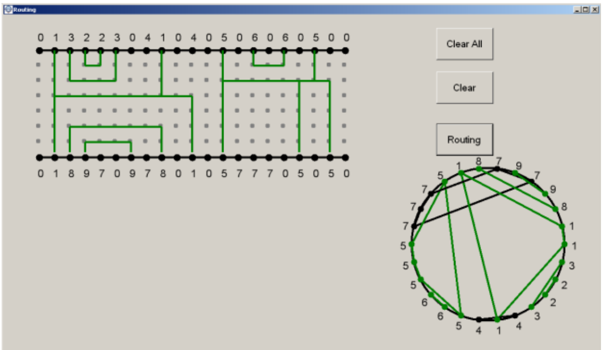


Рис. 4.1. Трассировка канала

В §4.2 описывается разработанная библиотека VML (VLSI Model Library) для языка C++. Она предоставляет возможность работы с различными моделями представления объектов, применяемых при проектирования СБИС.

Основные компоненты библиотеки.

1. Числовые последовательности
2. Выпуклые многоугольники
3. Гиперграфы
4. Прямоугольники.

В библиотеке реализованы разработанные в главах 1-3 алгоритмы: MIS_Polygons (алгоритм нахождения максимального независимого множества вершин в графе пересечений вписанных в окружность многоугольников), SolveLD, SolveLD_General, SolveDU, SolveDU_General, SolveLDR, SolveLDR_General, SolveLDRU, SolveLDRU_General (алгоритмы нахождения независимого множества прямоугольников максимального суммарного веса в различных случаях внешнерамочных прямоугольников).

Для получения более наглядного представления о скоростях предложенных алгоритмов было создано более 1000 тестов и сделан сравнительный анализ временных характеристик результатов их работы на этих тестах.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

- Задача трассировки наибольшего числа цепей однослойного канала достаточной ширины, сведена к нахождению максимального независимого множества вершин графа пересечений вписанных в окружность многоугольников. Для решения этой задачи предложен алгоритм сложности $O(n^2)$, где n – число вершин графа. [3]
- Разработан алгоритм разбиения множества двухконтактных цепей канала достаточной ширины на минимальное число частей, трассировка каждой из которых осуществима на одном слое. Сложность алгоритма $O(n \log\log n)$, где n – количество цепей. [6]
- Для нахождения максимального взвешенного независимого множества (МВНМ) вершин в n-вершинном графе пересечений внешнерамочных прямоугольников приведен алгоритм сложности $O(n^{11})$ и указан способ его применения при трассировке коробки соединений. [2, 5]
- В случае, когда в множестве внешнерамочных прямоугольников однотипные прямоугольники не пересекаются, для нахождения МВНМ представлен алгоритм сложности $O(n^4)$. [1, 2, 4]
- Построена минимальная реализация двух классов полных n-дольных k-униформных гиперграфов. [7]

В рамках диссертации создан также пакет программ с использованием языков C++, C#, содержащий программную реализацию разработанных алгоритмов.

СПИСОК РАБОТ ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Piliposyan E. *A note on maximum weight independent set in outer-rectangle graphs*, Mathematical Problems of Computer Science 36, pp. 51–56, 2012.
2. Пилипосян Э.Т. Алгоритмы построения максимального взвешенного независимого множества прямоугольников, Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, №2, 2012, СС. 3-19.
3. Пилипосян Э.Т. Графы пересечений вписанных в окружность многоугольников в задачах канальной трассировки. Труды шестой годичной научной конференции РАУ, СС. 71-78, 2012.
4. Пилипосян Э.Т. Максимальное взвешенное независимое множество прямоугольников. Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, №1, 2012, СС. 19-28
5. Пилипосян Э.Т. Максимальное взвешенное независимое множество прямоугольников. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 38, 30–31, (2012).
6. Пилипосян Э.Т. Многослойная канальная трассировка, Вестник Российско-Армянского (Славянского) университета. Серия физико-математические и естественные науки, № 2, 2010, СС. 67-76.
7. Пилипосян Э.Т., Пилипосян Т.Э. О минимальных реализациях гиперграфов. Высокие технологии, фундаментальные исследования, экономика. Сборник статей четырнадцатой международной научно-практической конференции. СПБ.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. Т. 2. СС. 86-89.

Ամփոփում

Փիլիպոսյան Էդուարդ Տիգրանի

ՀԱՏՈՒՄՆԵՐԻ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ՈՒՂԵԳԾՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Հաշվողական տեխնիկայի բուռն զարգացումը, ժամանակակից էլեկտրոնային սարքավորումների չափսերի բազմակի փոքրացումն ու կարևորագույն բնութագրիչների աննախադեպ բարելավումը հնարավոր են դառնում ի շնորհիվ այդ սարքավորումների նախագծման ու պատրաստման նոր տեխնոլոգիաների ներդրման:

Այս առումով առաջնակարգ նշանակություն է ստանում ինտեգրալ սխեմաների նախագծման գործընթացի ավտոմատացումը, որի կարևորագույն փուլերից է միացումների ուղեգծումը, մասնավորաբար՝ կապուղիների և միացման արկղերի ուղեգծումը: Ինտեգրալ սխեմաներում բաղադրիչների ու շղթաների քանակի մեծ լինելն ու շարունակական աճը բացառում են հատարկման մեթոդների օգտագործումը, գործնականում անհնար են դարձնում ուղեգծման ալիքային ալգորիթմների կիրառումն ու ենթադրում են առաջացող խնդիրների լուծման նոր, արագագործ ալգորիթմների մշակում:

Նախագծման ավտոմատացման աստիճանն ու նախագծվող սարքավորումների տեխնիկական բնութագրիչները մեծապես կախված են ինչպես դրանց ներկայացման հաջող մաթեմատիկական մոդելի ընտրությունից, այնպես էլ այն մաթեմատիկական խնդիրների լուծման որակից, որոնց բերվում են նախագծման խնդիրներն ընտրված մոդելի շրջանակներում: Մասնավորապես, սխեմայի ներկայացման գրաֆային մոդելի ընտրման դեպքում, կապուղիների և միացման արկղերի ուղեգծման հարցերը բերվում են հատուկ տիպի հատումների գրաֆների մինիմալ ներկման և մաքսիմալ անկախ բազմության կառուցման խնդիրներին:

Սակայն պարզվում է, որ նույնիսկ որոշ մասնավոր դեպքերում այդ խնդիրներն NP-դժվար են: Այդ առումով արդիական են, ինչպես այդ խնդիրների գործնականում պիտանի մասնավոր դեպքերի առանձնացումը, որոնց լուծման համար գտնվում են ճշգրիտ ու արդյունավետ ալգորիթմներ, այնպես էլ հետազոտվող պարամետրերի հասանելի գնահատականների ստացումը: Այս հարցերի ուսումնասիրմանն է նվիրված ներկա ատենախոսությունը:

Ատենախոսության նպատակը ինտեգրալ սխեմաների ներկայացման տարբեր մոդելների և այդ սխեմաների նախագծման կոնստրուկտորական փուլում առաջացող մաթեմատիկական խնդիրների ուսումնասիրումն է: Որպես մաթեմատիկական մոդելներ ուսումնասիրվել են.

- Շրջանագծին ներգծված բազմանկյունների հատումների գրաֆները, մասնավորապես դրանցում մաքսիմալ անկախ բազմություն կառուցելու խնդիրը:
- Թվային հաջորդականությունները, մասնավորապես դրանց տրոհումը մինիմալ թվով աճող ենթահաջորդականությունների:
- Հիպերգրաֆները, մասնավորապես հատուկ տիպի հիպերգաֆների մինիմալ իրացման խնդիրը:
- Ուղղանկյունների հատումների գրաֆները, մասնավորապես մաքսիմալ կշռով անկախ բազմության կառուցման խնդիրը:

Ատենախոսությունում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

- Բավարար լայնություն ունեցող միաշերտ կապուղու մեծագույն թվով շղթաների ուղեգծման խնդիրը բերված է շրջանագծին ներգծված բազմանկյունների հատումների գրաֆում գագաթների մաքսիմալ անկախ բազմություն գտնելուն: Վերջինիս լուծման համար առաջարկված է $O(n^2)$ բարդությամբ ալգորիթմ, որտեղ n-ը գրաֆի գագաթների քանակն է [3]:
- Մշակված է բավարար լայնություն ունեցող միաշերտ կապուղու երկկոնտակտանի շղթաների բազմության նվազագույն թվով այնպիսի մասերի տրոհման ալգորիթմ, որոնցից յուրաքանչյուրի ուղեգծումն իրականացնելի է մեկ շերտի վրա: Ալգորիթմի բարդությունն $O(n \log\log n)$ է, որտեղ n-ը շղթաների քանակն է [6]:
- Արտաշրջանակային ուղղանկյունների հատումների n-գագաթանի գրաֆում գագաթների մաքսիմալ կշռով անկախ բազմություն գտնելու համար առաջարկված է $O(n^{11})$ բարդությամբ ալգորիթմ, և ցույց է տրված այդ ալգորիթմի կիրառման եղանակը միացումների արկղերն ուղեգծելիս [2,5]:
- Այն դեպքերում,երբ արտաշրջանակային ուղղանկյունների բազմության մեջ նույնատիպերը չեն հատվում, մաքսիմալ կշռով անկախ բազմություն գտնելու համար առաջարկված է $O(n^4)$ բարդությամբ ալգորիթմ [1, 2, 4]:
- Կառուցված են լրիվ n-մասնյա k-ունիֆորմ հիպերգրաֆների երկու դասերի մինիմալ իրացումները: [7]

Ատենախոսության արդյունքների հիման վրա ստեղծված է ծրագրային փաթեթ C++, C# լեզուների օգտագործմամբ, որը պարունակում է մշակված ալգորիթմների ծրագրային իրականացումները:

RESUME

Eduard T. Piliposyan

APPLICATION OF INTERSECTION GRAPHS IN ROUTING PROBLEMS

The great boost in computing technology development, the drastic decrease in physical size of modern electronic devices and the unprecedented improvement of the most important characteristics are made possible due to the new technologies of design and integration of these devices.

In this respect the problem of VLSI design process automation gains utmost importance. One of its main stages is routing of the connections, in particular channel and switchbox routings. The big number of components and nets exclude the usage of wave algorithms of routing and assume new and effective solutions for emerged problems.

The purpose of the work is to study different VLSI design models and the mathematical problems emerging in them. The following mathematical models were studied.

- Intersection graphs of polygons inscribed in a circle, in particular, the problem of constructing the maximum independent set in them.
- Numeric sequences, in particular, the problem of partitioning the sequence into a minimal number of increasing subsequences.
- Hypergraphs, in particular, the problem of minimal realization for two types of hypergraphs.
- Intersection graphs of rectangles, in particular, the problem of constructing the maximum weighted independent set.

The main results of the work are the following

- Single layer channels of sufficient width have been considered, and the routing problem of the maximum number of nets in them has been reduced to the determination of the maximum independent set of vertices in an intersection graph of polygons inscribed in a circle. Algorithm of complexity $O(n^2)$ is presented to solve this problem, where n is the number of the vertices [3].
- An algorithm has been presented that partitions the set of two-terminal nets of a channel of sufficient width into a minimal number of parts s. t. the routing of each is accomplished on a single layer. The complexity of the algorithm is $O(n \log\log n)$, where n is the number of the chains [6].
- An algorithm of $O(n^{11})$ complexity has been proposed which finds the maximum weight independent set of vertices in an n-vertex outer-rectangle graph. A way of its application in the switchbox routing problem is shown [2, 5].

- For the case when all rectangles of the same type do not intersect, an algorithm of $O(n^4)$ complexity is presented to find the maximum weight independent set in the n-element set of outer-rectangle graph [1, 2, 4].
- Minimal realization for two classes of full n-partite k-uniform hypergraphs is created [7].

The software package containing implementation of the developed algorithms is produced using C++ and C# programming languages.

Ծավալը՝ 24 էջ, Տպաքանակ՝ 100 օրինակ
ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ համակարգչային պոլիգրաֆիայի լաբորատորիա
Երևան, Պ. Սևակի 1