

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ, ԳԻՏՈՒԹՅԱՆ,
ՄՇԱԿՈՒՅԹԻ ԵՎ ՍՊՈՐՏԻ ՆԱԽԱՐԱՐՈՒԹՅՈՒՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ՊՈԼԻՏԵԽՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Արգարյան Հովհաննես Մամվելի

ՍՈՒՐ-ՊԵՆՐՈՒԶԻ ԿՈՍՊՈԼԵՔՍ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ
ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՎԱԾ
ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՇՎՈՂԱԿԱՆ ՄԻՋՈՑՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄԸ

Ե.13.02 - «Ավտոմատացման համակարգեր» մասնագիտությամբ
տեխնիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի
հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան 2026

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ, КУЛЬТУРЫ И СПОРТА
РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ АРМЕНИИ

Աբգարյան Օգաննես Սամվելովիչ

РАЗРАБОТКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СРЕДСТВ
АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ
ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОБОБЩЕННЫХ ОБРАТНЫХ
МАТРИЦ МУРА-ПЕНРОУЗА

ԱՎՏՈՐԵՓԵՐԱՏ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
технических наук по специальности 05.13.02 -
“Системы автоматизации”

Երևան 2026

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարանում (ՀԱՊՀ):

Գիտական ղեկավար՝	տ.գ.դ. Ս.Հ. Միմոնյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	տ.գ.դ. Ս.Շ. Բալասանյան Ֆ.-մ.գ.դ. Յու.Ռ. Հակոբյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ

Ատենախոսության պաշտպանությունը կայանալու է 2026թ. մայիսի 29-ին, ժամը 14³⁰-ին, ՀԱՊՀ-ում գործող «Կառավարման և ավտոմատացման» 032 մասնագիտական խորհրդի նիստում (հասցեն՝ 0009, Երևան, Տերյան փ., 105, 17 մասնաշենք):

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀԱՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2026թ. ապրիլի 27-ին:

032 Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար, տ.գ.թ.



Անուշ Վազգենի Մելիքյան

Тема диссертации утверждена в Национальном политехническом университете Армении (НПУА)

Научный руководитель:	д.т.н. С.О. Симонян
Официальные оппоненты:	д.т.н. С.Ш. Баласания д.ф.-м.н. Ю.Р. Акопян
Ведущая организация:	Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА

Защита диссертации состоится 29 мая 2026г. в 14³⁰ часов на заседании Специализированного совета 032 — "Управления и автоматизации", действующего при Национальном политехническом университете Армении, по адресу: 0009, г. Ереван, ул. Теряна, 105, корпус 17.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке НПУА.

Автореферат разослан 27 апреля 2026г.

Ученый секретарь
Специализированного совета 032
к.т.н.



Ануш Вагеновна Меликян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В современном мире глобальные информационные технологии по сравнению с другими сферами проявляют темпы перманентного ускоренного развития, что дает возможность применять совершенно новые подходы в самых различных областях человеческой деятельности для эффективного решения встречающихся в них задач, создавая новейшие инструменты.

Однопараметрические матрицы, их обратные и обобщенные обратные достаточно часто встречаются в различных научных исследованиях и прикладных задачах, в частности: при решении дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, в красивых задачах, при решении систем функциональных уравнений, использовании стохастических матриц и марковских цепей, исследовании поведения динамических систем, решении различных задач систем управления, изучении параметрических задач линейного программирования и т.д. Однако, существующие методы определения однопараметрических обобщенных обратных (ООО) матриц применяются лишь в ограниченных случаях, а также они трудно реализуемы с практической точки зрения.

Таким образом, возникает необходимость в разработке новых методов определения ООО матриц, и в частности, нужно разработать методы:

- 1) которые будут более эффективны, чем существующие методы,
- 2) на основе которых архитектура разрабатываемых вычислительных средств будет более доброкачественной,
- 3) на основе которых будет возможно создать пакет прикладных программ (ППП) с использованием современных информационных технологий,
- 4) вычислительные характеристики которых превзойдут характеристики существующих методов.

Как показывают исследования, для этого целесообразно использовать аппарат дифференциальных преобразований академика НАН Украины, д.т.н., проф. Г.Е. Пухова, поскольку вычислительные процедуры, получаемые с его помощью, проще по сравнению с применением других известных преобразований. Следовательно, дифференциальные преобразования могут быть использованы в качестве основного математического аппарата при разработке вычислительных средств автоматизированного определения ООО матриц.

Данная диссертационная работа посвящена разработке вычислительных средств автоматизированного определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза. Она направлена на создание ППП, соответствующего специфике комплексных однопараметрических матриц, на основе комбинации четырех условий Мура-Пенроуза и дифференциальных преобразований. Кроме того, включение в ППП основных матричных операций позволит использовать его также в качестве матричного калькулятора, расширяя возможности применения ППП в различных научных и образовательных областях. Созданный ППП будет свободно доступен, стимулируя дальнейшее развитие технологий работы с однопараметрическими матрицами.

Предметом исследования является разработка декомпозиционных вычислительных средств автоматизированного определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза.

Целью работы является разработка новых аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, создание на их основе ППП с использованием современных средств информационных технологий, а также проведение экспериментальных исследований с использованием созданного ППП и определение вычислительных характеристик разработанных средств.

Методы исследования. В ходе выполнения диссертации были использованы четыре условия Мура-Пенроуза для однопараметрических матриц, дифференциальные преобразования, средства современных информационных технологий, в частности, язык программирования Python, библиотека SymPy для выполнения математических операций, работы с матрицами и символических вычислений, а также библиотека PyQt для графического интерфейса ППП.

Научная новизна:

- Разработаны новые аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на четырех известных условиях.
- Разработаны новые численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на четырех известных условиях.
- Создан ППП с использованием разработанных численно-аналитических декомпозиционных методов, основанный на современных информационных технологиях.
- Решены модельные примеры и прикладные задачи с применением созданного ППП с целью выявления вычислительных характеристик разработанных средств.
- Полученные научные и практические результаты были обобщены, а также сделаны некоторые выводы и предложения.

Практическая ценность работы. Разработанный в диссертации ППП автоматизированного определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза реализован для использования как в операционной системе Windows, так и в Linux и macOS. Реализация на языке программирования Python значительно расширяет возможности пакета, позволяя использовать его на устройствах с установленным Python. Библиотека SymPy обеспечивает доступ к реализации математических функций, а также гарантирует выполнение точных математических символических операций, включая упрощение выражений, вычисление производных и т.д. Более того, поскольку SymPy полностью написан на Python, он легко интегрируется с экосистемой Python и может быть включен в более крупные проекты на Python. Кроме того, в отличие от других систем символических вычислений, SymPy относительно легковесен и имеет минимальные зависимости (в основном от mpmath). Графический пользовательский интерфейс на основе технологии PyQt делает пакет доступным как для специалистов, так и для обычных пользователей. Разработанная система применима в курсах высшего образования по линейной алгебре, прикладной теории вычислительных методов и другим физико-математическим и техническим дисциплинам, в практических задачах теории управления, в частности, в области робототехники (включая беспилотные летательные аппараты, роботы-манипуляторы и т.д.), а также в чисто математических задачах.

На защиту выносятся следующие научные положения:

- Разработанные аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза.
- Разработанные численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза.
- ППП, предназначенный для пользователя и основанный на современных информационных технологиях и дифференциальных преобразованиях.

Достоверность научных положений. Достоверность научных положений подтверждается результатами программной реализации ППП автоматизированного определения

комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза и всесторонними экспериментальными исследованиями, представленными в диссертации, а также математическими обоснованиями.

Внедрение. Результаты диссертации, в частности, разработанные аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, а также созданный ППП внедрены в теоретические и практические занятия кафедры «Информационные технологии и автоматизация» (ИТ и А) НПУА.

Апробация работы. Основные научные и практические результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

- научных семинарах кафедры ИТ и А НПУА (Ереван, Армения, 2023–2026 гг.);
- годичных конференциях НПУА (Ереван, Армения, 2024–2025 гг.).

Публикации. Основные положения, представленные в диссертации, обобщены в десяти научных работах, две из которых без соавторов, а одна - в научной базе данных “SCOPUS” (“СКОПУС”) и “Web of Science” (“Веб оф Сайнс”). Список статей приведен в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованной литературы из 110 наименований, и одного приложения, в котором представлен акт внедрения результатов диссертации. Основной объём диссертации составляет 130 страниц, а вместе с приложением - 131 страниц. Диссертация написана на армянском языке.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулирована цель исследования, описаны используемые методы, представлены научная новизна, практическая ценность и основные научные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «ОБЗОРНАЯ ЧАСТЬ» представлено понятие обобщенных обратных матриц для числовых матриц, их типы, в частности, псевдообратная матрица Мура-Пенроуза, а также существующие методы их определения. Далее, приведены известные 4 условия Мура-Пенроуза для ООМ матриц:

$$A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t), \quad (1.2.1)$$

$$A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t), \quad (1.2.2)$$

$$[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t), \quad (1.2.3)$$

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t), \quad (1.2.4)$$

рассмотрены существующие методы их определения, в частности, основанные на дифференциальных преобразованиях, а также ППП, созданные с использованием этих методов и средств современных информационных технологий. Проведен анализ работ в вышеупомянутых областях, в основном опубликованных за последние 10-20 лет, среди которых монография заслуженного деятеля науки Республики Армения, д.т.н., проф. С.О. Симоняна, в котором представлены результаты оригинальных исследований автора, а также кандидатских диссертаций его учеников. Диссертации посвящены разработке:

1) аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов с косвенным и прямым подходами решения систем линейных однопараметрических конечных уравнений с использованием дифференциальных преобразований; аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов, основанных на методе наименьших квадратов; аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов с прямыми подходами, основанные на сопряженном аналоге метода наименьших квадратов;

2) дифференциальных аналогов (D-аналогов) В-, Q-, BQ-методов определения параметрических и обобщенных обратных матриц Дразина (ООМД); D-аналога рекурсивного метода Дразина для определения ООМД; D-аналога метода определения ООМД, основанного на скелетном разложении матрицы; D-аналога метода определения ООМД, основанного на каноническом представлении матрицы;

3) D-аналогов простейшего метода, основанных на известных простейших тождествах; D-аналогов определения $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, основанных на первом и втором известных тождествах Мура-Пенроуза; D-аналогов, основанных на универсальном методе; D-аналога симплекс метода определения квадратных обратных матриц A^{-1} и обобщенных обратных матриц $A^{(+)}$;

4) D-аналога метода Гревилля; D-аналога метода ортогонализации Грамма-Шмидта; D-аналога метода исключения Гаусса-Жордана; D-аналога метода блочного разбиения матрицы; D-аналога метода сингулярного разложения нестационарной матрицы.

Во всех вышеперечисленных диссертациях разработаны соответствующие ППП с использованием различных средств современных информационных технологий, в том числе C++, Java, MATLAB и т.д., а основным математическим аппаратом служат дифференциальные преобразования Г.Е. Пухова.

Далее в главе представлена алгебра дифференциальных преобразований, а также их применение в различных научных и практических задачах. Важно отметить, что при дифференциальных преобразованиях переход из области:

- ❖ оригиналов в область изображений (прямые преобразования) осуществляется операцией дифференцирования,

- ❖ изображений в область оригиналов (обратные преобразования) осуществляется операцией суммирования.

Благодаря этим 2-м важным обстоятельствам дифференциальные преобразования легко используются для разработки эффективных вычислительных средств с применением современных информационных технологий.

В конце главы сформулированы основные цели и задачи диссертации на основе представленных выводов.

Во второй главе «РАЗРАБОТКА ДЕКОМПОЗИЦИОННЫХ МЕТОДОВ» предложены:

- ❖ аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на условиях (1.2.1) и (1.2.2),

- ❖ численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на полученных аналитических соотношениях и дифференциальных преобразованиях,

- ❖ 3 варианта аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии (1.2.3),

- ❖ численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на 2-ом варианте аналитических методов и дифференциальных преобразованиях,

- ❖ 3 варианта аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии (1.2.4),

- ❖ численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООМ матриц Мура-Пенроуза, основанные на 2-ом и 3-ем вариантах аналитических методов и дифференциальных преобразованиях.

2.1 Разработка аналитических и численно-аналитических методов, основанных на 1-ом условии Мура-Пенроуза

1) Пусть имеется матрица $A(t)_{m \times n}$, для которой $m \leq n$. По аналогии с автономными матрицами $A_{m \times n}$, обобщенная обратная $A^+(t)_{n \times m}$ будет иметь вид:

$$A^+(t)_{n \times m} = A^*(t)_{n \times m} [A(t) \cdot A^*(t)]^+_{m \times m}. \quad (2.1.1)$$

Допустим также, что $A(t) \in C^{m \times n}$, при котором разложение

$$A(t)_{m \times n} = A_1(t)_{m \times n} + j \cdot A_2(t)_{m \times n}, \quad (2.1.2)$$

а матрица:

$$\begin{aligned} [A(t) \cdot A^*(t)] &= [A_1(t) + j \cdot A_2(t)] \cdot [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T = \\ &= [A_1(t) \cdot A_1^T(t) + A_2(t) \cdot A_2^T(t)] + j \cdot [A_2(t) \cdot A_1^T(t) - A_1(t) \cdot A_2^T(t)] = B_1(t) + j \cdot B_2(t), \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где

$$B_1(t)_{m \times m} = A_1(t) \cdot A_1^T(t) + A_2(t) \cdot A_2^T(t), \quad (2.1.4)$$

$$B_2(t)_{m \times m} = A_2(t) \cdot A_1^T(t) - A_1(t) \cdot A_2^T(t), \quad (2.1.5)$$

а также

$$[A(t) \cdot A^*(t)]^+_{m \times m} = [B_1(t)_{m \times m} + j \cdot B_2(t)_{m \times m}]^+ = [X_1(t)_{m \times m} + j \cdot X_2(t)_{m \times m}]. \quad (2.1.6)$$

Замечание 2.1.1. Нетрудно убедиться, что матрица $B_1(t)$ симметрична из-за симметричности слагаемых $A_1(t) \cdot A_1^T(t)$ и $A_2(t) \cdot A_2^T(t)$, а матрица $B_2(t)$ кососимметрична с нулевыми диагональными элементами.

I. Аналитическое решение

Использование условия Мура-Пенроуза (1.2.1) по отношению к матрице $[A(t) \cdot A^*(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A(t) \cdot A^*(t)] \cdot [A(t) \cdot A^*(t)]^+ \cdot [A(t) \cdot A^*(t)] = [A(t) \cdot A^*(t)], \quad (2.1.7)$$

раскрытие которого с учетом (2.1.3) и (2.1.6) дает

$$[B_1(t) + j \cdot B_2(t)] \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [B_1(t) + j \cdot B_2(t)] = [B_1(t) + j \cdot B_2(t)]$$

или

$$\left[\begin{array}{c|c} [B_1(t)] & -B_2(t) \\ \hline [B_2(t)] & B_1(t) \end{array} \right]_{2m \times 2m} \cdot \left[\begin{array}{c|c} [X_1(t)] & -X_2(t) \\ \hline [X_2(t)] & X_1(t) \end{array} \right]_{2m \times 2m} - E_{2m \times 2m} \cdot \left[\begin{array}{c} [B_1(t)] \\ [B_2(t)] \end{array} \right]_{2m \times m} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]_{2m \times m}, \quad (2.1.8)$$

следовательно,

$$\left[\begin{array}{c|c} [X_1(t)] & -X_2(t) \\ \hline [X_2(t)] & X_1(t) \end{array} \right]_{2m \times 2m} = \left[\begin{array}{c|c} [B_1(t)] & -B_2(t) \\ \hline [B_2(t)] & B_1(t) \end{array} \right]_{2m \times 2m}^+ = \left[\begin{array}{c|c} [B_1(t)] & -B_2(t) \\ \hline [B_2(t)] & B_1(t) \end{array} \right]_{2m \times 2m}^{-1}. \quad (2.1.9)$$

Таким образом, имея матрицы $X_1(t)$ и $X_2(t)$, в соответствии с (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.6) можно определить и матрицу

$$\begin{aligned} A^+(t)_{n \times m} &= [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] = \\ &= [A_1^T(t) \cdot X_1(t) + A_2^T(t) \cdot X_2(t)] + j \cdot [A_1^T(t) \cdot X_2(t) - A_2^T(t) \cdot X_1(t)]. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

II. Численно-аналитическое решение

В качестве основного математического аппарата воспользуемся дифференциальными преобразованиями. Обозначим

$$B(t) = \left[\begin{array}{c|c} [B_1(t)] & -B_2(t) \\ \hline [B_2(t)] & B_1(t) \end{array} \right], X(t) = \left[\begin{array}{c|c} [X_1(t)] & -X_2(t) \\ \hline [X_2(t)] & X_1(t) \end{array} \right], \quad (2.1.11)$$

при которых матричные дискреты (прямые преобразования):

$$B(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K B(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\theta}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.12)$$

$$X(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K X(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\theta}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.13)$$

а тейлоровские матричные оригиналы (обратные преобразования):

$$B(t) = \mathfrak{a}_1(t, t_\theta, H, B(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\theta}{H} \right)^K \cdot B(K), \quad (2.1.14)$$

$$X(t) = \mathfrak{a}_2(t, t_\theta, H, X(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\theta}{H} \right)^K \cdot X(K), \quad (2.1.15)$$

где t_θ - центр аппроксимации тейлоровских разложений; H - масштабный коэффициент, выравнивающий размерности оригиналов и их изображений; K - целочисленный аргумент; $\mathfrak{a}_1(\cdot)$ и $\mathfrak{a}_2(\cdot)$ - тейлоровские матричные функции, восстанавливающие оригиналы $B(t)$ и $X(t)$ соответственно. Естественно, при этом предполагается, что все элементы матриц $B(t)$ и $X(t)$ обладают достаточной степенью гладкости в центре аппроксимации t_θ .

Замечание 2.1.2. Матрицы $B(t)$ и $X(t)$ блочно-кососимметричные.

Замечание 2.1.3. Матричные оригиналы (2.1.14) и (2.1.15) могут быть восстановлены и другими обратными дифференциальными преобразованиями (например, маклореновскими ($t_\theta = 0$), дробно-рациональными (Паде), одноточечными, многоточечными и др.).

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (2.1.9) в область дифференциальных изображений при соотношениях (2.1.11) - (2.1.15) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$X(0) = B^+(0); \quad (2.1.16)$$

при $K \geq 1$:

$$X(K) = -B^+(0) \left[\sum_{l=1}^K B(l) \cdot X(K-l) \right]. \quad (2.1.17)$$

Таким образом, имея матричные дискреты $X(K), K = \overline{0, \infty}$, будем иметь и блоки $X_1(K)$ и $X_2(K)$, а следовательно, оригиналы $X_1(t)$ и $X_2(t)$ в соответствии с (2.1.15). Тогда можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ в соответствии с (2.1.10).

2) Пусть имеется матрица $A(t)_{m \times n}$, для которой $m \geq n$. По аналогии с автономными матрицами $A_{m \times n}$, обобщенная обратная $A^+(t)_{n \times m}$ будет иметь вид:

$$A^+(t)_{n \times m} = [A^*(t) \cdot A(t)]^+_{n \times n} \cdot A^*(t)_{n \times m}. \quad (2.1.18)$$

Допустим также, что $A(t) \in C^{m \times n}$, при котором имеет место разложение (2.1.2), а матрица:

$$\begin{aligned} [A^*(t) \cdot A(t)] &= [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)] = \\ &= [A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t)] + j \cdot [A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t)] = C_1(t) + j \cdot C_2(t), \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

где

$$C_1(t)_{n \times n} = A_1^T(t) \cdot A_1(t) + A_2^T(t) \cdot A_2(t), \quad (2.1.20)$$

$$C_2(t)_{n \times n} = A_1^T(t) \cdot A_2(t) - A_2^T(t) \cdot A_1(t), \quad (2.1.21)$$

а также

$$[A^*(t) \cdot A(t)]^+ = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)]^+ = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]_{n \times n}; \quad (2.1.22)$$

Замечание 2.1.4. Нетрудно убедиться, что матрица $C_1(t)$ симметрична из-за симметричности слагаемых $A_1^T(t) \cdot A_1(t)$ и $A_2^T(t) \cdot A_2(t)$, а матрица $C_2(t)$ кососимметрична с нулевыми диагональными элементами.

I. Аналитическое решение

Использование условия Мура-Пенроуза (1.2.1) по отношению к матрице $[A^*(t) \cdot A(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A^*(t) \cdot A(t)] \cdot [A^*(t) \cdot A(t)]^+ \cdot [A^*(t) \cdot A(t)] = [A^*(t) \cdot A(t)], \quad (2.1.23)$$

раскрытие которого с учетом (2.1.19) и (2.1.22) дает

$$[C_1(t) + j \cdot C_2(t)] \cdot [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [C_1(t) + j \cdot C_2(t)] = [C_1(t) + j \cdot C_2(t)]$$

или

$$\left[\begin{array}{c} [C_1(t)] - C_2(t) \\ [C_2(t)] \quad C_1(t) \end{array} \right]_{2n \times 2n} \cdot \left[\begin{array}{c} [Y_1(t)] - Y_2(t) \\ [Y_2(t)] \quad Y_1(t) \end{array} \right]_{2n \times 2n} - E_{2n \times 2n} \cdot \left[\begin{array}{c} [C_1(t)] \\ [C_2(t)] \end{array} \right]_{2n \times n} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]_{2n \times n}, \quad (2.1.24)$$

следовательно,

$$\left[\begin{array}{c} [Y_1(t)] - Y_2(t) \\ [Y_2(t)] \quad Y_1(t) \end{array} \right]_{2n \times 2n} = \left[\begin{array}{c} [C_1(t)] - C_2(t) \\ [C_2(t)] \quad C_1(t) \end{array} \right]_{2n \times 2n}^+. \quad (2.1.25)$$

Таким образом, имея матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$, в соответствии с (2.1.18), (2.1.19) и (2.1.23) можно определить и матрицу

$$\begin{aligned} A^+(t)_{n \times n} &= [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [A_1(t) - j \cdot A_2(t)]^T = \\ &= [Y_1(t) \cdot A_1^T(t) + Y_2(t) \cdot A_2^T(t)] + j \cdot [Y_2(t) \cdot A_1^T(t) - Y_1(t) \cdot A_2^T(t)]; \end{aligned} \quad (2.1.26)$$

II. Численно-аналитическое решение

В качестве основного математического аппарата воспользуемся дифференциальными преобразованиями. Обозначим

$$C(t) = \left[\begin{array}{c} [C_1(t)] - C_2(t) \\ [C_2(t)] \quad C_1(t) \end{array} \right], Y(t) = \left[\begin{array}{c} [Y_1(t)] - Y_2(t) \\ [Y_2(t)] \quad Y_1(t) \end{array} \right], \quad (2.1.27)$$

при которых матричные дискреты (прямые преобразования):

$$C(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K C(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\theta}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.28)$$

$$Y(K) = \frac{H^K}{K!} \cdot \left[\frac{d^K Y(t)}{dt^K} \right]_{t=t_\theta}, \quad K = \overline{0, \infty}, \quad (2.1.29)$$

а тейлоровские матричные оригиналы (обратные преобразования):

$$C(t) = \mathfrak{x}_3(t, t_\theta, H, C(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_\theta}{H} \right)^K \cdot C(K), \quad (2.1.30)$$

$$Y(t) = \mathfrak{a}_4(t, t_g, H, Y(K)) = \sum_{K=0}^{\infty} \left(\frac{t - t_g}{H} \right)^K \cdot Y(K), \quad (2.1.31)$$

где $\mathfrak{a}_3(\cdot)$ и $\mathfrak{a}_4(\cdot)$ - тейлоровские матричные функции, восстанавливающие оригиналы $C(t)$ и $Y(t)$ соответственно. Естественно, при этом предполагается, что все элементы матриц $C(t)$ и $Y(t)$ обладают достаточной степенью гладкости в центре аппроксимации t_g .

Замечание 2.1.5. Матрицы $C(t)$ и $Y(t)$ блочно-кососимметричны.

Замечание 2.1.6. Матричные оригиналы (2.1.30) и (2.1.31) могут быть восстановлены и другими обратными дифференциальными преобразованиями (например, маклореновскими ($t_g = 0$), дробно-рациональными (Паде), одноточечными, многоточечными и др.).

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (2.1.25) в область дифференциальных изображений при соотношениях (2.1.27) - (2.1.31) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$Y(0) = C^+(0); \quad (2.1.32)$$

при $K \geq 1$:

$$Y(K) = -C^+(0) \left[\sum_{l=1}^K C(l) \cdot Y(K-l) \right]. \quad (2.1.33)$$

Таким образом, имея матричные дискреты $Y(K)$, $K = \overline{0, \infty}$, будем иметь и блоки $Y_1(K)$ и $Y_2(K)$, а следовательно, оригиналы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ в соответствии с (2.1.31). Тогда можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ в соответствии с (2.1.26).

2.2 Разработка аналитических и численно-аналитических методов, основанных на 2-ом условии Мура-Пенроуза

1) Пусть имеется матрица $A(t)_{m \times n}$, $m \leq n$, для которой имеют место соотношения (2.1.1) – (2.1.6).

I. Аналитическое решение

Использование условия Мура-Пенроуза (1.2.2) по отношению к матрице $[A(t) \cdot A^*(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A(t) \cdot A^*(t)]^+ \cdot [A(t) \cdot A^*(t)] \cdot [A(t) \cdot A^*(t)]^+ = [A(t) \cdot A^*(t)]^+, \quad (2.2.1)$$

раскрытие которого с учетом (2.1.3) и (2.1.6) дает

$$[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [B_1(t) + j \cdot B_2(t)] \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] = [X_1(t) + j \cdot X_2(t)]$$

или

$$\begin{bmatrix} [X_1(t)] \\ [X_2(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_1(t)] \\ [B_2(t)] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [X_1(t)] \\ [X_2(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [X_1(t)] \\ [X_2(t)] \end{bmatrix}. \quad (2.2.2)$$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} [X_1(t)] \\ [X_2(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_1(t)] \\ [B_2(t)] \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} [X_1(t)] \\ [X_2(t)] \end{bmatrix}^{-1}. \quad (2.2.3)$$

Замечание 2.2.1. Очевидно, что при использовании условий Мура-Пенроуза (1.2.1) и (1.2.2) приходим к одному и тому же аналитическому решению, т.е. (2.1.9) \equiv (2.2.3).

Таким образом, имея матрицы $X_1(t)$ и $X_2(t)$, в соответствии с (2.1.10), можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$.

II. Численно-аналитическое решение

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (2.2.3) в область дифференциальных изображений при соотношениях (2.1.11) - (2.1.15) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$X(0) = B^+(0); \quad (2.2.4)$$

при $K \geq 1$:

$$X(K) = - \left[\sum_{l=1}^K X(l) \cdot B(K-l) \right] B^+(0). \quad (2.2.5)$$

Очевидно, что (2.1.16) \equiv (2.2.4), (2.1.17) \equiv (2.2.5), что и должно было быть. Следовательно, и в этом случае матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ можно определить в соответствии с (2.1.10).

2) Пусть имеется матрица $A(t)_{m \times n}$, $m \geq n$, для которой имеют место соотношения (2.1.18) – (2.1.22).

I. Аналитическое решение

Использование условия Мура-Пенроуза (1.2.2) по отношению к матрице $[A^+(t) \cdot A(t)]$ приводит к следующему выражению:

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^+ \cdot [A^+(t) \cdot A(t)] \cdot [A^+(t) \cdot A(t)]^+ = [A^+(t) \cdot A(t)]^+, \quad (2.2.6)$$

раскрытие которого с учетом (2.1.19) и (2.1.22) дает

$$[Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] \cdot [C_1(t) + j \cdot C_2(t)] \cdot [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)] = [Y_1(t) + j \cdot Y_2(t)]$$

или

$$\begin{bmatrix} [Y_1(t)]^+ & -Y_2(t) \\ [Y_2(t)]^+ & Y_1(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [C_1(t)]^+ & -C_2(t) \\ [C_2(t)]^+ & C_1(t) \end{bmatrix} - E_{2n \times 2n} \cdot \begin{bmatrix} [Y_1(t)] \\ [Y_2(t)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [0] \end{bmatrix}, \quad (2.2.7)$$

$2n \times 2n \qquad \qquad \qquad 2n \times 2n \qquad \qquad \qquad 2n \times n \qquad \qquad \qquad 2n \times n$

следовательно,

$$\begin{bmatrix} [Y_1(t)]^+ & -Y_2(t) \\ [Y_2(t)]^+ & Y_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [C_1(t)]^+ & -C_2(t) \\ [C_2(t)]^+ & C_1(t) \end{bmatrix}^+. \quad (2.2.8)$$

$2n \times 2n \qquad \qquad \qquad 2n \times 2n$

Таким образом, имея матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$, в соответствии с (2.1.26) можно определить и матрицу $A^+(t)_{n \times m}$.

Замечание 2.2.2. Очевидно, что при использовании условий Мура-Пенроуза (1.2.1) и (1.2.2) и здесь приходим к одному и тому же аналитическому решению, т.е. (2.1.25) \equiv (2.2.8).

II. Численно-аналитическое решение

Использование дифференциальных преобразований для перевода оригинала (2.2.8) в область дифференциальных изображений при соотношениях (2.1.27) - (2.1.31) приводит к следующему:

при $K = 0$:

$$Y(0) = C^+(0); \quad (2.2.9)$$

при $K \geq 1$:

$$Y(K) = - \left[\sum_{l=1}^K C(l) \cdot Y(K-l) \right] \cdot C^+(0). \quad (2.2.10)$$

Очевидно, что (2.1.32) \equiv (2.2.9), (2.1.33) \equiv (2.2.10), что и должно было быть. Следовательно, и в этом случае матрицу $A^+(t)_{n \times m}$ можно определить в соответствии с (2.1.26).

2.3 Разработка аналитических и численно-аналитических методов, основанных на 3-ем условии Мура-Пенроуза

Пусть имеется матрица $A(t) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, для которой имеет место разложение (2.1.2). В этом случае обобщенная обратная матрица $A^+(t) \in \mathbb{C}^{n \times m}$, для которой имеет место разложение

$$A^+(t)_{n \times m} = X_1(t)_{n \times m} + j \cdot X_2(t)_{n \times m}. \quad (2.3.1)$$

I. Аналитическое решение (2-ой вариант)

Соотношение (1.2.3) умножив на матрицу $A(t)$ справа, получим:

$$[A(t) \cdot A^+(t)]^* \cdot A(t) = A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t),$$

а с учетом (1.2.1) – представление

$$[A(t) \cdot A^+(t)]^* \cdot A(t) = A(t). \quad (2.3.2)$$

Тогда соотношение (1.2.3) с учетом разложений (2.1.2) и (2.3.1) примет вид:

$$= \left[\begin{array}{c} [X_1^T(t) \cdot A_1^T(t) - X_2^T(t) \cdot A_2^T(t)] - j \cdot [X_1^T(t) \cdot A_2^T(t) + X_2^T(t) \cdot A_1^T(t)] \\ [A_1(t) + j \cdot A_2(t)], \end{array} \right]$$

или

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hline -X_2^T(t) & -X_1^T(t) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline A_2^T(t) & -A_1^T(t) \end{array} \right] - E \cdot \left[\begin{array}{c} A_1(t) \\ A_2(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].$$

С учетом того, что $A_1(t) \neq 0$, $A_2(t) \neq 0$, откуда имеем:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hline -X_2^T(t) & -X_1^T(t) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline A_2^T(t) & -A_1^T(t) \end{array} \right] = E. \quad (2.3.3)$$

Следовательно, аналитическое решение выглядит так:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(t) & -X_2^T(t) \\ \hline -X_2^T(t) & -X_1^T(t) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(t) & A_2^T(t) \\ \hline A_2^T(t) & -A_1^T(t) \end{array} \right]^+, \quad (2.3.4)$$

откуда, в соответствии с разложением (2.3.1) получим и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)$, используя матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

II. Численно-аналитическое решение

В качестве основного математического аппарата воспользуемся дифференциальными преобразованиями (2.1.14) и (2.1.16), и блочно-матричное представление (2.3.3) переведем из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь:

$$\sum_{l=0}^K \left[\begin{array}{c|c} X_1^T(l) & -X_2^T(l) \\ \hline -X_2^T(l) & -X_1^T(l) \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(k-l) & A_2^T(k-l) \\ \hline A_2^T(k-l) & -A_1^T(k-l) \end{array} \right] = E \cdot \delta(K), \delta(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K \neq 0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Отсюда:

при $K = 0$:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ \hline -X_2^T(0) & -X_1^T(0) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1^T(0) & A_2^T(0) \\ \hline A_2^T(0) & -A_1^T(0) \end{array} \right]^+; \quad (2.3.6)$$

при $K \geq 1$:

$$\left[\begin{array}{c|c} X_1^T(K) & -X_2^T(K) \\ \hline -X_2^T(K) & -X_1^T(K) \end{array} \right] =$$

$$= - \left[\sum_{l=0}^{K-1} \begin{bmatrix} X_1^T(l) & \vdots & -X_2^T(l) \\ -X_2^T(l) & \vdots & -X_1^T(l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1^T(k-l) & \vdots & A_2^T(k-l) \\ A_2^T(k-l) & \vdots & -A_1^T(k-l) \end{bmatrix} \right] \cdot \begin{bmatrix} A_1^T(0) & \vdots & A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & \vdots & -A_1^T(0) \end{bmatrix}^+ . \quad (2.3.7)$$

Итак, имея блочно-матричные дискреты (2.3.6) и (2.3.7), с учетом (2.1.16) можно восстановить блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$ или численно-аналитическое решение $A^+(t)$ согласно (2.3.1).

2.4 Разработка аналитических и численно-аналитических методов, основанных на 4-ом условии Мура-Пенроуза

Пусть имеется матрица $A(t) \in \mathbb{C}^{m \times n}$, для которой имеет место разложение (2.1.2). В этом случае обобщенная обратная матрица $A^+(t) \in \mathbb{C}^{n \times m}$, для которой имеет место разложение (2.3.1).

I. Аналитическое решение

2-ой вариант

Соотношение (1.2.4) умножив на матрицу $A(t)$ слева получим

$$A(t) \cdot [A^+(t) \cdot A(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t),$$

а с учетом (1.2.1) – представление

$$A(t) \cdot [A^+(t) \cdot A(t)]^* = A(t). \quad (2.4.1)$$

Тогда соотношение (2.4.1) с учетом разложений (2.1.2) и (2.3.1) примет вид:

$$[A_1(t) + j \cdot A_2(t)] \cdot [[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]]^* = A_1(t) + j \cdot A_2(t)$$

или

$$\begin{matrix} [A_1(t) & \vdots & A_2(t)] & \cdot & \left[E - \begin{bmatrix} A_1^T(t) & \vdots & -A_2^T(t) \\ A_2^T(t) & \vdots & A_1^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(t) & \vdots & -X_2^T(t) \\ X_2^T(t) & \vdots & X_1^T(t) \end{bmatrix} \right] & = & [0 & \vdots & 0]. \\ mx2n & & 2nx2n & & 2nx2m & & 2mx2n & & mx2n \end{matrix}$$

С учетом того, что $A_1(t) \neq 0, A_2(t) \neq 0$, отсюда имеем:

$$\begin{bmatrix} A_1^T(t) & \vdots & -A_2^T(t) \\ A_2^T(t) & \vdots & A_1^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(t) & \vdots & -X_2^T(t) \\ X_2^T(t) & \vdots & X_1^T(t) \end{bmatrix} = E. \quad (2.4.2)$$

$2nx2m \qquad \qquad 2mx2n \qquad \qquad 2nx2n$

Следовательно, аналитическое решение выглядит так:

$$\begin{bmatrix} X_1^T(t) & \vdots & -X_2^T(t) \\ X_2^T(t) & \vdots & X_1^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T(t) & \vdots & -A_2^T(t) \\ A_2^T(t) & \vdots & A_1^T(t) \end{bmatrix}^+, \quad (2.4.3)$$

$2mx2n \qquad \qquad 2mx2n$

откуда в соответствии с разложением (2.3.1) получим и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)_{n \times m}$, используя матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$.

3-ий вариант

Соотношение (1.2.4) умножив на матрицу $A^+(t)$ справа получим

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* \cdot A^+(t) = A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t),$$

а с учетом (1.2.2) – представление

$$[A^+(t) \cdot A(t)]^* \cdot A^+(t) = A^+(t). \quad (2.4.4)$$

Тогда соотношение (2.4.4) с учетом разложений (2.1.2) и (2.3.1) примет вид:

$$[[X_1(t) + j \cdot X_2(t)] \cdot [A_1(t) + j \cdot A_2(t)]]^* \cdot [X_1(t) + j \cdot X_2(t)] = [X_1(t) + j \cdot X_2(t)]$$

или

$$[X_1(t) \cdot A_1(t) - X_2(t) \cdot A_2(t)]^T - j \cdot [X_2(t) \cdot A_1(t) + X_1(t) \cdot A_2(t)]^T = E.$$

Последнюю можно представить в виде

а)

$$\begin{bmatrix} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(t) \\ X_2^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.5)$$

откуда

$$\begin{bmatrix} X_1^T(t) \\ X_2^T(t) \end{bmatrix}_{2mxn} = \begin{bmatrix} A_1^T(t) & -A_2^T(t) \\ A_2^T(t) & A_1^T(t) \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.6)$$

или в виде

б)

$$\begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.7)$$

откуда

$$\begin{bmatrix} X_1^T(t) & X_2^T(t) \\ -X_2^T(t) & X_1^T(t) \end{bmatrix}_{2mx2n} = \begin{bmatrix} A_1^T(t) & A_2^T(t) \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} E & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.4.8)$$

Итак, имея матричные блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$, в соответствии с (2.3.1) можно определить и обобщенную обратную матрицу $A^+(t)_{nxm}$.

II. Численно-аналитическое решение

1-ый вариант

В качестве основного математического аппарата воспользуемся дифференциальными преобразованиями (2.1.12) и (2.1.13), и блочно-матричное представление (2.4.2) переведем из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь:

$$\sum_{l=0}^K \begin{bmatrix} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{bmatrix}_{2mx2n} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(k-l) & -X_2^T(k-l) \\ X_2^T(k-l) & X_1^T(k-l) \end{bmatrix}_{2nx2m} = E \cdot \delta(K), \quad \delta(K) = \begin{cases} 1, & \text{если } K = 0, \\ 0, & \text{если } K \neq 0. \end{cases} \quad (2.4.9)$$

Отсюда:

при $K = 0$:

$$\begin{bmatrix} X_1^T(0) & -X_2^T(0) \\ X_2^T(0) & X_1^T(0) \end{bmatrix}_{2mx2n} = \begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{bmatrix}^+ \cdot E; \quad (2.4.10)$$

при $K \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} X_1^T(K) & -X_2^T(K) \\ X_2^T(K) & X_1^T(K) \end{bmatrix}_{2mx2n} = - \begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{bmatrix}^+_{2mx2n} \times \\ \times \left[\sum_{l=1}^K \begin{bmatrix} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{bmatrix}_{2nx2m} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(k-l) & -X_2^T(k-l) \\ X_2^T(k-l) & X_1^T(k-l) \end{bmatrix}_{2mx2n} \right]. \quad (2.4.11)$$

2-ой вариант

Блочно-матричное представление (2.4.5) переведем из области оригиналов в область дифференциальных изображений. При этом будем иметь:

$$\sum_{l=0}^K \begin{bmatrix} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{bmatrix}_{2nx2m} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(k-l) \\ X_2^T(k-l) \end{bmatrix}_{2mxn} = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}_{2nxn} \cdot \delta(K). \quad (2.4.12)$$

Отсюда:

при $K = 0$:

$$\begin{bmatrix} X_1^T(0) \\ X_2^T(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{bmatrix}^+ \cdot \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4.13)$$

$2mxn \qquad \qquad \qquad 2mx2n \qquad \qquad \qquad 2n \times n$

при $K \geq 1$:

$$\begin{bmatrix} X_1^T(K) \\ X_2^T(K) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A_1^T(0) & -A_2^T(0) \\ A_2^T(0) & A_1^T(0) \end{bmatrix}^+ \cdot \left[\sum_{l=1}^K \begin{bmatrix} A_1^T(l) & -A_2^T(l) \\ A_2^T(l) & A_1^T(l) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1^T(k-l) \\ X_2^T(k-l) \end{bmatrix} \right]. \quad (2.4.14)$$

$2mxn \qquad \qquad \qquad 2mx2n \qquad \qquad \qquad 2nx2m \qquad \qquad \qquad 2mxn$

Итак, имея блочно-матричные дискреты (2.4.10) - (2.4.14), с учетом (2.1.15) можно восстановить блоки $X_1(t)$ и $X_2(t)$ или численно-аналитическое решение $A^+(t)$ согласно (2.3.1).

2.5 Расчет погрешностей в случае численно-аналитических методов

В диссертации для оценки точности вычисления ООО матрицы Мура-Пенроуза используется методология, основанная на евклидовой норме:

$$\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

После вычисления комплексной ООО матрицы Мура-Пенроуза $A^+(t)$ любым из численно-аналитических методов в соответствии с условиями (1.2.1) – (1.2.4), нужно:

1) вычислить разницу между левой и правой сторонами каждого из условий (1.2.1) – (1.2.4) для матриц $A(t)$ и $A^+(t)$:

$$\Delta_1(t) = A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) - A(t), \quad (2.5.1)$$

$$\Delta_2(t) = A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) - A^+(t), \quad (2.5.2)$$

$$\Delta_3(t) = [A(t) \cdot A^+(t)]^* - A(t) \cdot A^+(t), \quad (2.5.3)$$

$$\Delta_4(t) = [A^+(t) \cdot A(t)]^* - A^+(t) \cdot A(t), \quad (2.5.4)$$

2) вычислить евклидову норму каждой из разностей:

$$E_1(t) = \|\Delta_1(t)\|_2, \quad (2.5.5)$$

$$E_2(t) = \|\Delta_2(t)\|_2, \quad (2.5.6)$$

$$E_3(t) = \|\Delta_3(t)\|_2, \quad (2.5.7)$$

$$E_4(t) = \|\Delta_4(t)\|_2, \quad (2.5.8)$$

3) вычислить значение каждой из евклидовых норм (таблица 1) в центре аппроксимации t_θ , а также в точках $t_\theta - 0.1$ и $t_\theta + 0.1$.

Таблица 1

Таблица погрешностей

t	(1.2.1) условие	(1.2.2) условие	(1.2.3) условие	(1.2.4) условие
$t_\theta - 0.1$	$E_1(t_\theta - 0.1)$	$E_2(t_\theta - 0.1)$	$E_3(t_\theta - 0.1)$	$E_4(t_\theta - 0.1)$
t_θ	$E_1(t_\theta)$	$E_2(t_\theta)$	$E_3(t_\theta)$	$E_4(t_\theta)$
$t_\theta + 0.1$	$E_1(t_\theta + 0.1)$	$E_2(t_\theta + 0.1)$	$E_3(t_\theta + 0.1)$	$E_4(t_\theta + 0.1)$

В конце главы приведены основные выводы относительно разработанных аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов.

В третьей главе «РАЗРАБОТКА ПАКЕТА ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ» представлена архитектура ППП на основе разработанных аналитических и численно-аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза. Далее, разработан сам ППП на языке программирования Python. Для выполнения

математических операций, работы с матрицами и символических вычислений используется библиотека SymPy. Графический интерфейс ППП создан с использованием библиотеки PyQt.

При запуске ППП открывается его главное окно, состоящее из 2 вкладок. Меню в правом верхнем углу окна позволяет изменить язык приложения, выбрав один из следующих языков: армянский, английский или русский. Вкладка «Основные операции» предназначена для выполнения базовых матричных операций с введенной матрицей (вычисление определителя, транспонирование матрицы, вычисление обратной матрицы (если она существует)). При вводе элементов матрицы:

- ❖ символ «I» соответствует мнимой единице,
- ❖ знак умножения (*) должен быть указан явно,
- ❖ степень переменной записывается в стиле Python (например: $t^2 \rightarrow t * * 2$),
- ❖ если числитель и/или знаменатель дроби являются литеральными выражениями,

они должны быть заключены в скобки (например: $-\frac{j}{2t} \rightarrow -I/(2 * t)$).

Вкладка «Обобщенная обратная» (рис. 1) предназначена для вычисления ООМ матрицы в соответствии с условиями Мура-Пенроуза (1.2.1) – (1.2.4).

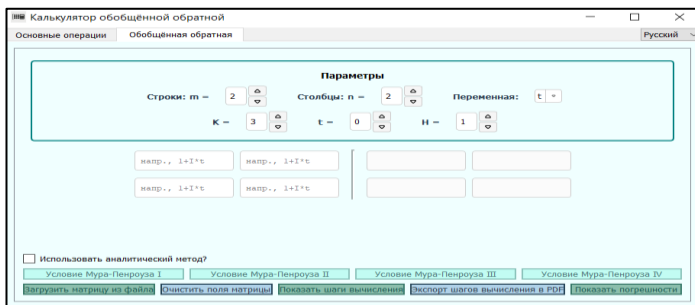


Рис. 1. Вкладка «Обобщенная обратная»

Вкладка позволяет ввести количество строк и столбцов матрицы, значения параметров K , t_g и H , а также элементы матрицы, количество которых меняется в зависимости от значения строки и столбцов, а ввод осуществляется с использованием тех же правил и стиля, что и на вкладке «Основные операции».

Для вычисления ООМ матрицы с использованием численно-аналитических методов в соответствии с условиями Мура-Пенроуза, вкладка содержит кнопки, соответствующие 4 условиям, которые активируются при вводе всех элементов матрицы. Кроме того, вкладка также предоставляет возможность вычисления ООМ матрицы с использованием аналитических методов условий (1.2.1) и (1.2.2).

Если количество строк или столбцов матрицы больше 10, то ее элементы необходимо ввести с помощью кнопки «Загрузить матрицу из файла», которая предназначена для чтения матрицы из текстового файла с расширением *.txt и записи ее элементов в соответствующие поля ввода. При этом элементы матрицы в текстовом файле должны быть записаны в соответствии с вышеупомянутыми правилами и стилем, построчно и с разделением пробелами.

Если хотя бы один из элементов матрицы введен, активируется кнопка «Очистить поля матрицы», которая позволяет очистить поля ввода элементов матрицы и деактивировать кнопки 4 условий.

После вычисления ООО матрицы с использованием любого из условий (1.2.1) – (1.2.4), результат отображается в блоках, показанных справа от входной матрицы, причем их количество меняется в зависимости от размера входной матрицы. Кроме того, после вычисления ООО матрицы также активируется кнопка:

- ❖ «Показать шаги вычисления», которая отображает шаги вычисления комплексной ООО матрицы Мура-Пенроуза в отдельном окне в зависимости от выбранного метода и языка ППП,

- ❖ «Экспорт шагов вычисления в PDF» позволяет сгенерировать PDF-файл на основе шагов вычислений ООО матрицы в зависимости от выбранного метода и языка ППП,

- ❖ «Показать погрешности», которая отображает ошибки вычислений численно-аналитических методов согласно таблице 1 в зависимости от выбранного метода и языка ППП.

В случае необходимости, ППП может быть легко дополнен другими методами определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза и доработан необходимыми функциональными возможностями.

В четвертой главе «ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ» решены:

- ❖ модельные примеры с:

1) комплексной однопараметрической недоопределенной матрицей

$$A_{m \times n}(t) = \begin{bmatrix} t - 1 + j(t^2 + 1) & t^2 & -5t + j(3t - 2) \\ jt & t + 1 + 5j & -2tj \end{bmatrix}, m = 2, n = 3.$$

Для входной матрицы $A(t)$ при значениях параметров $K = 3, t_\theta = 0, H = 1$ полученная комплексная ООО матрица $A^+(t)$ согласно численно-аналитическому методу условий:

1. (1.2.1) или (1.2.2) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} . При использовании $K = 0,9$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} ,

2. (1.2.3) или (1.2.4) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} и выглядит так:

$$A_{n \times m}^+(t) = \begin{bmatrix} 1.1019t^2 + 0.1111t + j(-0.3796t^2 - 0.5t - 0.1667) - 0.1667 & 0.0385t^2 - 0.0256jt^2 \\ -0.3376t^2 + j(0.1880t^2 + 0.1667t) & -0.0042t^2 + 0.0355t + j(0.0063t^2 + 0.0148t - 0.1923) + 0.0385 \\ -1.4815t^2 - 0.6111t + j(-0.7222t^2 + 0.3889t + 0.3333) & -0.0641t^2 - 0.0128jt^2 \end{bmatrix}.$$

При использовании $K = 0,9$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} .

2) комплексной однопараметрической определенной матрицей

$$A_{m \times n}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{j}{2t} & -\frac{1}{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{j}{2t} & 0 & 0 & -\frac{1}{2t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3t} & 0 & 0 & -\frac{j}{3t} & -\frac{1}{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2t} & \frac{j}{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{j}{2t} & -\frac{1}{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{j}{2t} & 0 & 0 & -\frac{1}{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3t} & 0 & 0 & \frac{j}{3t} & -\frac{1}{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2t} & -\frac{j}{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3t} & 0 & 0 \end{bmatrix}, m = n = 10.$$

Для входной матрицы $A(t)$ при значениях параметров $K = 3, t_g = 1, H = 1$ полученная комплексная ООМ матрица $A^+(t)$ согласно численно-аналитическим методам условий (1.2.1) – (1.2.4) точно удовлетворяет всем условиям и выглядит так:

$$A_{n \times m}^+(t) = \begin{bmatrix} 0 & -jt & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ jt & 0 & 0 & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 0 & 0 & -jt & t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & jt & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & jt & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -jt & 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 & jt & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & -jt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) комплексной однопараметрической переопределенной матрицей

$$A_{m \times n}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1-jt \\ t & -jt^2 \\ t^2 & jt \\ 1+jt & -jt \end{bmatrix}, m = 4, n = 2.$$

Для входной матрицы $A(t)$ при значениях параметров $K = 3, t_g = 0, H = 1$ полученная комплексная ООМ матрица $A^+(t)$ согласно численно-аналитическому методу условий:

1. (1.2.1) или (1.2.2) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} . При использовании $K = \overline{0,9}$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} ,

2. (1.2.3) или (1.2.4) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} и выглядит так:

$$A_{n \times m}^+(t) = \begin{bmatrix} t^2 + jt & 0 & 0 & -3t^2 - 2jt + 1 \\ 1 - t^2 & 0 & 0 & 2t^2 + jt - 1 \end{bmatrix}.$$

При использовании $K = \overline{0,9}$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} .

❖ практический пример с комплексной однопараметрической определенной кососимметричной матрицей

$$A_{m \times n}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -jt & t^2 \\ jt & 0 & -jt \\ -t^2 & jt & 0 \end{bmatrix}, m = 3, n = 3.$$

Для входной матрицы $A(t)$ при значениях параметров $K = 3, t_g = 1, H = 1$ полученная комплексная ООМ матрица $A^+(t)$ согласно численно-аналитическому методу условий:

1. (1.2.1) или (1.2.2) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} . При использовании $K = \overline{0,9}$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} ,

2. (1.2.3) или (1.2.4) удовлетворяет условиям (1.2.1) – (1.2.4) с погрешностью не более 10^{-2} и выглядит так:

$$A_{n \times m}^+(t) = \begin{bmatrix} 0 & j(0.4444t - 0.4815(t-1)^2 - 0.7778) & 0.4444t - 0.4815(t-1)^2 - 0.7778 \\ j(-0.4444t + 0.4815(t-1)^2 + 0.7778) & 0 & j(0.4444t - 0.4815(t-1)^2 - 0.7778) \\ -0.4444t + 0.4815(t-1)^2 + 0.7778 & j(-0.4444t + 0.4815(t-1)^2 + 0.7778) & 0 \end{bmatrix}.$$

При использовании $K = \overline{0,9}$ матричных дискретов эта погрешность достигает 10^{-7} .

Далее в главе представлен сравнительный анализ программных реализаций численно-аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООМ матриц

Мура-Петроуза по зависимости времени выполнения (рис. 2) и используемой памяти (рис. 3) от количества матричных дискретов и размера входной матрицы.

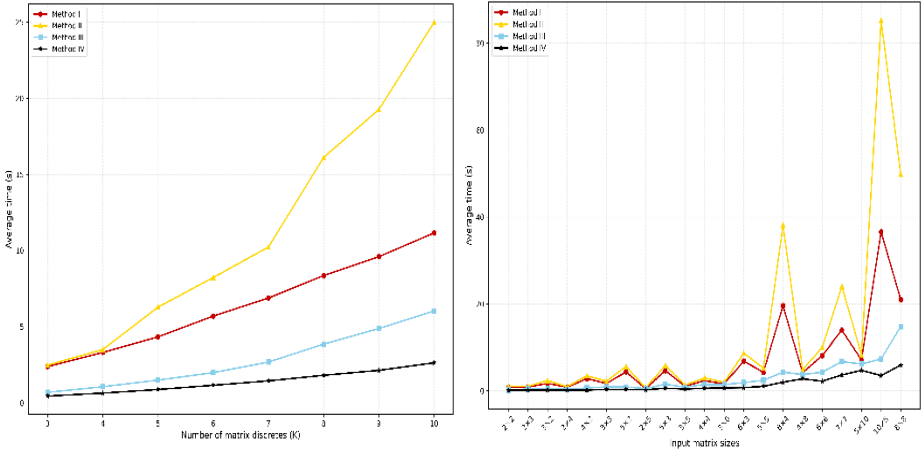


Рис. 2. Зависимость времени выполнения от количества матричных дискретов (слева) и размера входной матрицы (справа)

Показано, что с увеличением числа матричных дискретов точность определения обобщенной обратной матрицы возрастает, однако при этом используются большие вычислительные ресурсы.

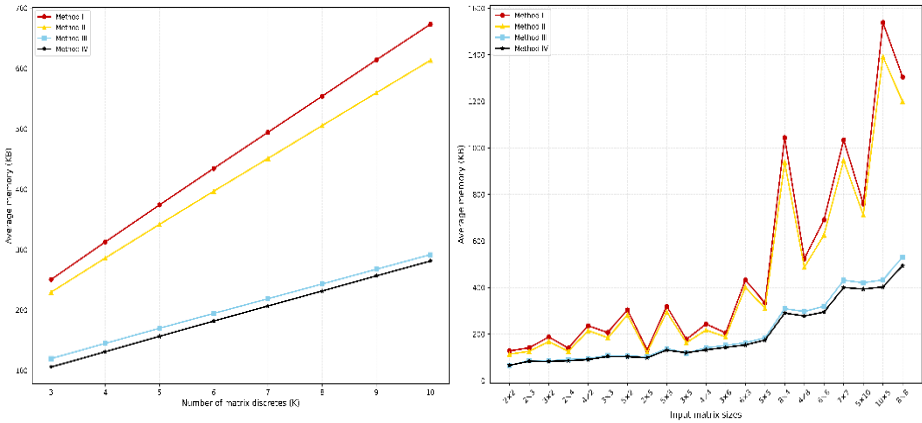


Рис. 3. Зависимость используемой памяти от количества матричных дискретов (слева) и размера входной матрицы (справа)

В конце главы приведены основные выводы экспериментальных исследований разработанного ППП.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Разработаны и реализованы аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии Мура-Пенроуза $A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t)$ и дифференциальных преобразованиях [1], [2], [6].
2. Разработаны и реализованы аналитические и численно-аналитические декомпозиционные методы определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии Мура-Пенроуза $A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t)$ и дифференциальных преобразованиях [1], [2], [7].
3. Разработаны 3 варианта аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии Мура-Пенроуза $[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t)$. Численно-аналитические методы разработаны и реализованы на основе 2-го аналитического решения, а в качестве основного математического аппарата использован метод дифференциальных преобразований [3], [8].
4. Разработаны 3 варианта аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанные на условии Мура-Пенроуза $[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t)$. Численно-аналитические методы разработаны и реализованы на основе 2-го и 3-го аналитических решений, а в качестве основного математического аппарата использован метод дифференциальных преобразований [4], [9].
5. Разработан удобный и доступный пользовательский ППП, включающий вкладки для основных матричных операций с однопараметрическими матрицами и для вычисления ООО матрицы Мура-Пенроуза, функциональные возможности которых реализованы с использованием библиотеки SymPy. Использование компонентов библиотеки PyQt обеспечило стабильную, быструю и удобную графическую среду [5], [10].
6. Исследование еще раз подтвердило, что с помощью метода дифференциальных преобразований можно решить сложно решаемую задачу определения обобщенной обратной матрицы Мура-Пенроуза для комплексных однопараметрических матриц путем создания автоматизированной системы, предоставляющей несколько вариантов выполнения вычислений, а также широкие возможности отслеживать их ход [10].

Предлагается:

1. Разработка новых аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанных на известных 4-х условиях Мура-Пенроуза для однопараметрических матриц.
2. Разработка новых численно-аналитических декомпозиционных методов определения комплексных ООО матриц Мура-Пенроуза, основанных на соответствующих аналитических методах и дифференциальных преобразованиях.
3. Разработка удобного и современного ППП на основе современных информационных технологий с широкими вычислительными возможностями, который может эффективно использоваться в различных научных исследованиях, а также для решения различных прикладных задач образовательной сферы.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Симонян С.О., Чилингарян М.Г., **Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (I) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2023. - № 2. – С. 9 - 21. DOI: [10.53297/18293336-2023.2-9](https://doi.org/10.53297/18293336-2023.2-9)
2. Симонян С.О., Чилингарян М.Г., **Абгарян О.С.** Декомпозиционные методы определения комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Известия НАН РА и НПУА. Серия технических наук. – 2023. – Том 76, № 4. – С. 514 - 524. DOI: [10.53297/0002306X-2023.v76.4-514](https://doi.org/10.53297/0002306X-2023.v76.4-514)
3. Simonyan S.H., **Abgaryan H.S.**, Avetisyan A.G. Definition of Complex One-Parameter Generalized Moore-Penrose Inverses Using Differential Transformations // Computational and Mathematical Methods. – 2025. – Issue 1. – P. 1 - 14 (SCOPUS, Web of Science). DOI: [10.1155/cmm4/8895138](https://doi.org/10.1155/cmm4/8895138)
4. Симонян С.О., Аветисян А.Г., **Абгарян О.С.** К определению комплексных однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза (II) // Вестник НПУА: Информационные технологии, электроника, радиотехника. – 2025. - № 1. – С. 9 - 19. DOI: [10.53297/18293336-2025.1-9](https://doi.org/10.53297/18293336-2025.1-9)
5. **Абгарян О.С.**, Симонян С.О., Аветисян А.Г., Чилингарян М.Г., Меликян А.В. Об автоматизированном определении однопараметрических обобщенных обратных матриц Мура-Пенроуза // НПУА Вестник: сборник научных статей. – 2025. - № 1. – С. 86 - 91.
6. Simonyan S.H., Melikyan A.V., **Abgaryan H.S.** Software Implementation of Decomposition Methods for Determining Complex One-Parameter Generalized Inverse Moore-Penrose Matrices (I) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 1. – P. 9 – 19. DOI: [10.53297/18293336-2024.1-9](https://doi.org/10.53297/18293336-2024.1-9)
7. Simonyan S.H., Melikyan A.V., **Abgaryan H.S.** Software Implementation of Decomposition Methods for Determining Complex One-Parameter Generalized Inverse Moore-Penrose Matrices (II) // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2024. - № 2. – P. 24 – 34. DOI: [10.53297/18293336-2024.2-24](https://doi.org/10.53297/18293336-2024.2-24)
8. **Աբգարյան Հ. Ս.** Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման ծրագրային իրականացումը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ (I) // ՀՀ ԳԱԱ և ՀԱՊՀ Տեղեկագիր. Տեխնիկական գիտությունների սերիա. – 2024. – Հատոր 77, № 4. – էջ 520 - 527. DOI: [10.53297/0002306X-2024.v77.4-520](https://doi.org/10.53297/0002306X-2024.v77.4-520)
9. **Աբգարյան Հ. Ս.** Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման ծրագրային իրականացումը դիֆերենցիալ ձևափոխությունների կիրառմամբ (II) // ՀՀ ԳԱԱ և ՀԱՊՀ Տեղեկագիր. Տեխնիկական գիտությունների սերիա. – 2025. – Հատոր 78, № 1. – էջ 130 - 136. DOI: [10.53297/0002306X-2025.v78.1-130](https://doi.org/10.53297/0002306X-2025.v78.1-130)
10. Simonyan S.H., **Abgaryan H.S.**, Khachatryan M.G. A Comparative Analysis of Decomposition Methods for Determining Complex One-Parameter Generalized Inverse Moore-Penrose Matrices // Proceedings of NPUA: Information Technologies, Electronics, Radio Engineering. – 2025. - № 2. – P. 9 - 17. DOI: [10.53297/18293336-2025.2-9](https://doi.org/10.53297/18293336-2025.2-9)

ԵԶՐԱՀԱՆԳՈՒՄ ԵՎ ԱՌԱՋԱՐԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

1. Մշակվել և իրագործվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ և թվա-անալիտիկ եղանակներ, որոնք հիմնված են Մուր-Պենրոուզի $A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t)$ պայմանի և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա [1], [2], [6]:
2. Մշակվել և իրագործվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ և թվա-անալիտիկ եղանակներ, որոնք հիմնված են Մուր-Պենրոուզի $A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t)$ պայմանի և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա [1], [2], [7]:
3. Մշակվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ եղանակների 3 տարբերակ, որոնք հիմնված են Մուր-Պենրոուզի $[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t)$ պայմանի վրա: Թվա-անալիտիկ եղանակները մշակվել և իրագործվել են 2-րդ անալիտիկ լուծման հիման վրա, իսկ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ օգտագործվել է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների մեթոդը [3], [8]:
4. Մշակվել են Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման դեկոմպոզիցիոն անալիտիկ եղանակների 3 տարբերակ, որոնք հիմնված են Մուր-Պենրոուզի $[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t)$ պայմանի վրա: Թվա-անալիտիկ եղանակները մշակվել և իրագործվել են 2-րդ և 3-րդ անալիտիկ լուծումների հիման վրա, իսկ որպես հիմնական մաթեմատիկական ապարատ օգտագործվել է դիֆերենցիալ ձևափոխությունների մեթոդը [4], [9]:
5. Մշակվել է օգտագործողի համար հարմարավետ և մատչելի կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որը ներառում է միապարամետրական մատրիցների հետ հիմնական մատրիցային գործողությունների և Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձի հաշվարկի ներդիրները, որոնց ֆունկցիոնալ հնարավորություններն իրականացվել են SymPy գրադարանի միջոցով: PyQt գրադարանի բաղադրիչների կիրառումն ապահովել է կայուն, արագ աշխատող և հեշտ կիրառելի գրաֆիկական միջավայր [5], [10]:
6. Հետազոտության մեջ ևս մեկ անգամ հիմնավորվել է, որ դիֆերենցիալ ձևափոխությունների մեթոդի կիրառմամբ հնարավոր է լուծել կոմպլեքս միապարամետրական մատրիցների Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձ մատրիցը գտնելու դժվարալուծ խնդիրը՝ ստեղծելով ավտոմատացված համակարգ, որը տրամադրում է հաշվարկի իրականացման մի քանի տարբերակ, ինչպես նաև դրա ընթացքին հետևելու լայն հնարավորություններ [10]:

Առաջարկվում է՝

1. Մշակել Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման նոր անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակներ, որոնք հիմնված են Մուր-Պենրոուզի հայտնի 4 պայմանների վրա՝ միապարամետրական մատրիցների համար:
2. Մշակել Մուր-Պենրոուզի կոմպլեքս միապարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման նոր թվա-անալիտիկ դեկոմպոզիցիոն եղանակներ, որոնք հիմնված են համապատասխան անալիտիկ եղանակների և դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա:
3. Մշակել օգտագործողի համար հարմարավետ և ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների վրա հիմնված ու հաշվողական լայն հնարավորություններով օժտված կիրառական ծրագրերի փաթեթ, որը արդյունավետորեն կարող է օգտագործվել

ինչպես տարբեր գիտական հետազոտություններում, այնպես էլ կրթական ոլորտի գանազան կիրառական խնդիրներում:

CONCLUSION

1. Analytical and numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices have been developed and implemented, which are based on the Moore-Penrose $A(t) \cdot A^+(t) \cdot A(t) = A(t)$ condition and the differential transformations [1], [2], [6].
2. Analytical and numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices have been developed and implemented, which are based on the Moore-Penrose $A^+(t) \cdot A(t) \cdot A^+(t) = A^+(t)$ condition and the differential transformations [1], [2], [7].
3. 3 variants of analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices have been developed, which are based on the Moore-Penrose $[A(t) \cdot A^+(t)]^* = A(t) \cdot A^+(t)$ condition. Numerical-analytical methods have been developed and implemented on the basis of the 2nd analytical solution, and the differential transformations method has been used as the main mathematical apparatus [3], [8].
4. 3 variants of analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices of have been developed, which are based on the Moore-Penrose $[A^+(t) \cdot A(t)]^* = A^+(t) \cdot A(t)$ condition. Numerical-analytical methods have been developed and implemented based on the 2nd and 3rd analytical solutions, and the differential transformations method has been used as the main mathematical apparatus [4], [9].
5. A user-friendly and accessible software application package has been developed, which includes tabs for basic matrix operations with a one-parameter matrices and for calculating the generalized Moore-Penrose inverse, the functional capabilities of which have been implemented using the SymPy library. The use the PyQt library components has provided a stable, fast, and easy-to-use graphical environment [5], [10].
6. The research once again substantiated that by using the differential transformations method, it is possible to solve the difficult-to-solve problem of finding the generalized Moore-Penrose inverse matrix of complex one-parameter matrices by creating an automated system that provides several options for performing the calculation, as well as extensive opportunities to monitor its progress [10].

It is proposed:

1. To develop new analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices, which are based on the 4 well-known Moore-Penrose conditions for one-parameter matrices.
2. To develop new numerical-analytical decomposition methods for determining complex one-parameter generalized inverse Moore-Penrose matrices, which are based on the corresponding analytical methods and differential transformations.
3. To develop a user-friendly and modern information technology-based application software package with extensive computing capabilities that can be effectively used in various scientific research, as well as in various applied problems of the educational field.

