

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Պետրոսյան Տիգրան Կարենի

Գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների հետազոտում

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիրառական և մաթեմատիկական
տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական
գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2025

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Петросян Тигран Каренович

Исследование вершинно-различающих рёберных раскрасок графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2025

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Առաջատար կազմակերպություն՝

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ. Ա. Պետրոսյան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ. Ռ. Քամալյան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Տ. Է. Փիլիպոսյան
ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման
պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2025թ. հուլիսի 14-ին, ժ. 16⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող
ԲԿԳԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝
0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2025թ. հունիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝



Կ.Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:
Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

кандидат физ.-мат. наук П. А. Петросян
доктор физ.-мат. наук Р. Р. Камалян
Кандидат физ.-мат. наук Т. Э. Пилипосян
Институт проблем информатики и
автоматизации НАН РА

Защита состоится 14-го июля 2025г. в 16⁰⁰ часов на заседании действующего в
Ереванском государственном университете специализированного совета КВОН 050
“Математика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного
университета.

Автореферат разослан 13-го июня 2025г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук



К.Л. Аветисян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը

Համակարգչային գիտության արագընթաց աճը և տեղեկատվական տեխնոլոգիաների զարգացումը հանգեցրել են դիսկրետ մաթեմատիկայի խնդիրների վերաբերյալ հետաքրքրության մեծացմանը, և դրանում կարևոր դեր են խաղում գրաֆների տեսության խնդիրները և դրանց լուծումները: Գրաֆների տեսության նկատմամբ հետաքրքրությունը պայմանավորված է մի շարք գործոններով. դրանք են՝ գրաֆները պարզ, մատչելի և հզոր գործիք են կիրառական խնդիրների մոդելավորման համար, գրաֆների տարբեր հատկությունները և ինվարիանտները բավականաչափ ուսումնասիրված են, գրաֆների բազմաթիվ խնդիրների լուծման համար նախագծված և մշակված են տարբեր ալգորիթմներ (արդյունավետ, մոտավոր, պատահական) և այլն: Գրաֆների տեսության մեջ կարևոր տեղ են զբաղեցնում գրաֆների ներկումների խնդիրները: Պատմականորեն ներկումների նկատմամբ հետաքրքրությունը առաջացել է «Չորս գույների հիպոթեզ» հանրահայտ խնդրից ^{1,2}, համաձայն որի ամեն մի աշխարհագրական քարտեզ հնարավոր է ներկել չորս գույների միջոցով այնպես, որ յուրաքանչյուր երկրի տարածք ներկված լինի մի գույնով, իսկ ընդհանուր սահման ունեցող երկրները ներկված լինեն տարբեր գույներով:

Ներկայումս գրաֆների ներկումների հանդեպ հետաքրքրության հիմնական դրդապատճառը պայմանավորված է այդ խնդիրների և այլ կիրառական խնդիրների միջև առկա սերտ կապով: Մասնավորապես, գոյություն ունի անմիջական կապ գրաֆների ներկումների խնդիրների և կարգացուցակների տեսության խնդիրների ³, անլար ռադիոհաղորդման ցանցերի հաճախականությունների նշանակման խնդիրների ⁴, անկանոն ցանցերի խնդիրների ⁵ միջև: Այսպես, օրինակ, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը, գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը գտնելու խնդիրն բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը:

Գրաֆների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները գրաֆների տեսության մեջ ներմուծվել են Ա. Բերիսի, Ռ. Շելպի ⁶ և, նրանցից անկախ, որպես գրաֆի դիստինկտություն, Յ. Չերնի, Մ. Հորնակի և Ռ. Սոտակի ⁷ կողմից 90-ական թվականներին: G գրաֆի գազաթներ տարբերակող կողային ներկումը այնպիսի կողային ներկում է, որի դեպքում՝

¹K. Appel, W. Haken, Every planar map is four colorable, Part I, Discharging, Illinois Journal of Mathematics 21, 1977, pp. 429-490.

²K. Appel, W. Haken, J. Koch, Every planar map is four colorable, Part II, Reducibility, Illinois Journal of Mathematics 21, 1977, pp. 491-567.

³D. Marx, Graph colouring problems and their applications in scheduling, Periodica Polytechnica Ser. El. Eng. 48(1), 2004, pp. 11-16.

⁴M. Baolin, C. Yang, Distinguishing colorings of graphs and their subgraphs, AIMS Mathematics 8, 2023, pp. 26561-26573.

⁵B. Liu, G. Liu, Vertex-distinguishing edge colorings of graphs with degree sum conditions, Graphs and Combinatorics 26, 2010, pp. 781-791.

⁶A.C. Burris, R.H. Schelp, Vertex-distinguishing proper edge-colorings, Journal of Graph Theory 26(2), 1997, pp. 73-82.

⁷J. Černý, M. Hořnák, R. Šoták, Observability of a graph, Mathematica Slovaca 46, 1996, pp. 21-31.

- յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով,
- տարբեր գագաթներին կից կողերի գույների բազմությունները տարբեր են:

G գրաֆի $\chi'_{vd}(G)$ գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի տակ հասկանում են այն նվազագույն գույների քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի գագաթներ տարբերակող կողային ներկման համար: Դժվար չէ նկատել, որ ցանկացած G գրաֆի համար $\chi'_{vd}(G) \geq \chi'(G)$, որտեղ $\chi'(G)$ -ն G գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսն է: Մյուս կողմից հայտնի է, որ գոյություն ունեն G գրաֆներ, որոնց համար $\chi'_{vd}(G) > \chi'(G)$: Ա. Բերիսի, Ռ. Շելպի և Յ. Չերնի, Մ. Հորնակի և Ռ. Սոտակի կողմից գտնվել են պարզ ցիկլերի, անիվներ, լրիվ գրաֆների և լրիվ երկկողմանի գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսները: Նշենք, որ եթե G գրաֆի համար գոյություն ունի գագաթներ տարբերակող կողային ներկում $1, 2, \dots, k$ գույներով, ապա կամայական $1 \leq d \leq \Delta(G)$ թվի համար $\binom{n}{k} \geq n_d$, որտեղ $\Delta(G)$ -ն G գրաֆի առավելագույն աստիճանն է, իսկ n_d -ն՝ d աստիճան ունեցող գագաթների քանակն է: Այդ դեպքում, եթե $\pi(G) = \min\{k : \binom{n}{k} \geq n_d\}$ ցանկացած $1 \leq d \leq \Delta(G)$ թվի համար, ապա G գրաֆի կամայական գագաթներ տարբերակող կողային ներկումը օգտագործում է առնվազն $\pi(G)$ հատ գույն, հետևաբար՝ $\chi'_{vd}(G) \geq \pi(G)$: Մյուս կողմից, Ա. Բարիսը և Ռ. Շելպը 1997 թվականին ձևակերպել են գրաֆների տեսության հայտնի և բաց հիպոթեզներից մեկը, համաձայն որի, եթե G գրաֆն ունի գագաթներ տարբերակող կողային ներկում, ապա $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G)+1$:

Մի շարք աշխատանքներում^{8,9,10,11} հետազոտվել են գրաֆների որոշ դասերի գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները: Մասնավորապես, Կ. Բազգանի, Ա. Հարկաթ-Բենհամդինի, Հ. Լիի, Մ. Վոզնյակի կողմից ապացուցվել է, որ եթե G գրաֆն ունի գագաթներ տարբերակող կողային ներկում, ապա $\chi'_{vd}(G) \leq |V(G)|+1$: Գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները ներմուծվել են Ժ. Ժանգի, Լ. Լիուի և Ջ. Վանգի¹² կողմից 2002 թվականին:

G գրաֆի հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումը այնպիսի կողային ներկում է, որի դեպքում յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով և հարևան գագաթներին կից կողերի գույների բազմությունները տարբեր են: G գրաֆի $\chi'_{avd}(G)$ հարևան գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքս ասելով հասկանում են այն նվազագույն գույների քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկման համար: Գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների հետ է կապված գրաֆների տեսության հայտնի և բաց հիպոթեզներից մեկը, որն առաջարկել են Ժ. Ժանգը, Լ. Լիուն և Ջ. Վանգը: Համաձայն նշված հիպոթեզի ցանկացած հինգ գագաթանի պարզ ցիկլից տարբեր G գրաֆի համար, որը չի պարունակում մեկուսացված գագաթներ և կողեր, տեղի ունի $\chi'_{avd}(G) \leq \Delta(G) + 2$ անհավասարությունը: Հայտնի է, որ հիպոթեզը ճիշտ է լրիվ

⁸P.N. Balister, O.M. Riordan, R.H. Schelp, Vertex-distinguishing edge colorings of graphs, J. Graph Theory 42, 2003, pp. 95-109.

⁹A.C. Burr, Vertex-distinguishing edge-colorings, Ph.D. Dissertation, Memphis State University, Memphis, Tennessee, 1993.

¹⁰C. Bazgan, A. Harkat-Benhamdine, H. Li, M. Wozniak, On the vertex-distinguishing proper edge-colorings of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 75, 1999, pp. 288-301.

¹¹O. Favaron, H. Li, R.H. Schelp, Strong edge colorings of graphs, Discrete Math. 159, 1996, pp. 103-109.

¹²Z. Zhang, L. Liu, J. Wang, Adjacent strong edge coloring of graphs, Applied Math. Letters 15, 2002, pp. 623-626.

գրաֆների, ցանցերի ¹³, երկկողմանի գրաֆների ¹⁴ և որոշ հարթ գրաֆների ¹⁵ համար: ¹⁶ աշխատանքում տրվել է գրաֆների հարևան գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի ընդհանուր գնահատական:

Գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումներին նվիրված հետազոտությունների մեծ մասը վերաբերում են գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի ընդհանուր գնահատականներին, մինչդեռ գրաֆների տարբեր դասերի գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և դրանց քրոմատիկ ինդեքսների գնահատման խնդիրները մնում են քիչ հետազոտված: Չնայած այն հանգամանքին, որ n -չափանի խորանարդի՝ Q_n -ի գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի մասին հայտնի է միայն $\chi'_{vd}(Q_n)$ -ի վարքը մեծ n -երի դեպքում, սակայն հետազոտողների կողմից քիչ են ուսումնասիրվել այդ գրաֆին մոտ գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և դրանց քրոմատիկ ինդեքսների գնահատման հարցերը: Գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների հետազոտություններում անարդարացիորեն քիչ ուշադրություն է դարձված տարբեր գրաֆային գործողությունների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի գնահատման խնդիրներին:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և դրանում դիտարկված խնդիրները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման, ինչպես նաև գագաթներ տարբերակող կողային ներկման հիմնական հիպոթեզը հաստատող նոր դասերի հայտնաբերման խնդիրներ: Աշխատանքում հետազոտվել են նաև գրաֆային տարբեր գործողությունների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի գնահատման խնդիրներ: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների ուսումնասիրությունը գրաֆների տարբեր դասերի համար:

Հետազոտության օբյեկտները

Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների տարբեր դասերը, գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակները, ինչպես նաև գրաֆային տարբեր գործողությունների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները և դրանց քրոմատիկ պարամետրերը:

Հետազոտության մեթոդները

Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

¹³J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of meshes, Australas. J. Combin. 35, 2006, pp. 89-102.

¹⁴P.N. Balister, E. Györi, J. Lehel, R.H. Schelp, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings, SIAM J. Discrete Math. 21, 2007, pp. 237-250.

¹⁵K. Edwards, M. Hornák, M. Woźniak, On the neighbour-distinguishing index of a graph, Graphs and Combinatorics 22, 2006, pp. 341-350.

¹⁶H. Hatami, $\Delta + 300$ is a bound on the adjacent vertex distinguishing edge chromatic number, J. Combin. Theory Ser. B 95, 2005, pp. 246-256.

Գիտական նորույթը

Աշխատանքում առաջին անգամ ներմուծվել է գազաթների ցիկլիկ համարակալման նկատմամբ գազաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման եղանակ, և նրա հիման վրա ստացվել են մի շարք արդյունքներ տարբեր գրաֆների դասերի գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի վերաբերյալ: Չնայած նրան, որ գրաֆների դասական արտադրյալների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները ուսումնասիրվել են տարբեր հեղինակների կողմից, այս աշխատանքում առաջին անգամ հետազոտվել են գրաֆների կորոնա արտադրյալների, գումարի և դեկարտյան գումարի գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները և նրանց քրոմատիկ պարամետրերը, ինչպես նաև դիտարկվել են գազաթների սպեկտրների վրա որոշ սահմանափակումներով գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը

Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և դրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները կարող են կիրառվել անլար ռադիոհաղորդման ցանցերում հաճախականության նշանակման խնդիրներում, անկանոն ցանցերում և այլն:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

- 1) Որոշ ընդհանրացված Ֆիբոնաչիի և Լուկասի խորանարդների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ճշգրիտ արժեքներ,
- 2) Գրաֆների տարբեր դասերի համար գազաթներ տարբերակող կողային ներկման հիմնական հիպոթեզը հաստատող մի շարք արդյունքներ,
- 3) Ստորին և վերին գնահատականներ լրիվ բազմակողմանի գրաֆների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի վերաբերյալ և որոշ լրիվ բազմակողմանի գրաֆների համար այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքներ,
- 4) Հասանելի գնահատականներ գրաֆների կորոնա արտադրյալների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար,
- 5) Վերին գնահատականներ գրաֆների գումարի և դեկարտյան գումարի գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը

Ստացված արդյունքները զննվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. Science and Technology Convergence Conference 2019, Yerevan, Armenia, October 11-12. 2019,
2. XIV Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 2-6 декабря, 2019,

3. Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, July 01–03, 2021,
4. XV Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря, 2021,
5. 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25-30, 2023,
6. XVII Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 4-8 декабря, 2023,
7. Workshop on Data Analytics and Mathematical modeling (CSIT), Tbilisi, Georgia, June 26-28, 2024,
8. Համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի արդի խնդիրներ «ՀԳԿՄԱԽ 2025», ԵՊՀ, Երևան, Ապրիլի 28-30, 2025:

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են տարբեր սեմինարների ընթացքում՝ Հայ-Ռուսական համալսարանում, Երևանի պետական համալսարանում և ՀՀ ԳԱԱ ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում:

Հրապարակումները

Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 11 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը

Աշխատանքի ծավալը կազմում է 102 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Աշխատանքը ներառում է 17 նկար:

Աշխատանքի պարունակությունը

Այս աշխատանքում դիտարկվող բոլոր գրաֆները վերջավոր են, կողմնորոշված չեն և չունեն պատիկ կողեր և օղակներ: G գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$ -ով և $E(G)$ -ով: Ցանկացած $v \in V(G)$ -ի համար $d_G(v)$ -ով նշանակենք այդ գագաթի *աստիճանը* G -ում, $\delta(G)$ -ով և $\Delta(G)$ -ով նշանակենք G գրաֆի նվազագույն և առավելագույն աստիճանները, համապատասխանաբար:

G գրաֆի լրացում կոչվում է $\overline{G}$ գրաֆը, որի համար $V(\overline{G}) = V(G)$ և $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(\overline{G}) \text{ և } uv \notin E(G)\}$: G գրաֆի M կողերի բազմությունը կոչվում է *զուգացկում*, եթե M -ի ցանկացած երկու կող հարևան չեն: M -ը կոչվում է *կատարյալ զուգակցում*, եթե այն ծածկում է G գրաֆի բոլոր գագաթները:

Կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար Q_n -ով նշանակվում է *n-չափանի խորանարդը*, որտեղ

$$\bullet V(Q_n) = \{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\}\},$$

- $E(Q_n) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում})\}$:

Կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի համար $Q_n(f)$ -ով նշանակվում է n -*չափանի ընդհանրացված ֆիբոնաչիի խորանարդը*, որտեղ

- $V(Q_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ և } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ չի պարունակում } f \text{ ենթաբառը})\}$;
- $E(Q_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում})\}$:

Կամայական $n \in \mathbb{N}$ թվի և n -ից փոքր երկարությամբ f ենթաբառի համար, $L_n(f)$ -ով նշանակվում է n -*չափանի ընդհանրացված Լուկասի խորանարդը*, որտեղ

- $V(L_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ և } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ չի պարունակում } f \text{ ենթաբառը})\}$,
- $E(L_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում})\}$:

Ցանկացած $n, m \geq 1$ բնական թվերի համար լրիվ տրոհվող գրաֆ կոչվում է $CS_{n,m}$ գրաֆը, որի համար գոյություն ունեն n և m հզորություններով I և C բազմություններ, որ

- $V(CS_{n,m}) = I \cup C$,
- $E(CS_{n,m}) = \{uv : u \in I, v \in C \text{ կամ } u, v \in C\}$:

Կամայական $k, n \geq 2$ և l բնական թվերի համար $W'(k, n, l)$ առաջին տիպի ընդհանրացված հողմաղաց գրաֆ է կոչվում այն գրաֆը, որը կազմված է K_k լրիվ գրաֆի n կրկնօրինակներից, որոնց գագաթները միացված են K_l լրիվ գրաֆի գագաթներին: $W'(k, n, 1)$ գրաֆը կոչվում է հողմաղաց գրաֆ և նշանակվում է $W(k, n)$ -ով: $H_{n,n}$ թագ գրաֆ է կոչվում այն գրաֆը, որը ստացվում է $K_{n,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆից հեռացնելով կատարյալ զուգակցում:

G գրաֆը կոչվում է լրիվ r -կողմանի ($r \geq 2$) գրաֆ, եթե գրաֆի գագաթները կարող են բաժանվել r անկախ բազմությունների $V_1, \dots, V_r$ այնպես, որ կամայական գագաթ V_i -ից հարևան է բոլոր գագաթներին V_j -ից, որտեղ $1 \leq i < j \leq r$: Լրիվ r -կողմանի գրաֆը $V_1, \dots, V_r$ անկախ բազմություններով կոչվում է լրիվ r -կողմանի հավասարակշռված գրաֆ, եթե $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_k|$: Լրիվ r -կողմանի գրաֆը $V_1, \dots, V_r$ անկախ բազմություններով, չափերը $n_1, \dots, n_r$ համապատասխանաբար, կնշանակենք $K_{n_1, \dots, n_r}$ -ով:

G և H գրաֆների $G \circ H$ կորոնա արտադրյալը կառուցվում է մեկ G գրաֆի կրկնօրինակից և $|V(G)|$ հատ H գրաֆի կրկնօրինակներից՝ միացնելով G գրաֆի i -րդ գագաթը H գրաֆի i -րդ կրկնօրինակի բոլոր գագաթներին:

G և H գրաֆների գումար կոչվում է $G + H$ գրաֆը, որի համար

- $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$,
- $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{v_i v_j : v_i \in V(G), v_j \in V(H)\}$:

$\overline{K}_m + P_n$ գրաֆը կոչվում է հովիար գրաֆ և նշանակվում է $F_{m,n}$ -ով:

G և H գրաֆների կոմպոզիցիա կոչվում է $G[H]$ գրաֆը, որի համար

- $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$,
- $E(G[H]) = \{(v_1 u_1)(v_2 u_2) : v_1 v_2 \in V(G) \text{ կամ } (v_1 = v_2 \text{ և } u_1 u_2 \in E(H))\}$:

G և H գրաֆների դեկարտյան գումար կոչվում է $G \oplus H$ գրաֆը, որի համար

- $V(G \oplus H) = V(G) \times V(H)$,
- $E(G \oplus H) = \{(v_1 u_1)(v_2 u_2) : v_1 v_2 \in V(G) \text{ կամ } u_1 u_2 \in V(H)\}$:

Տրված $C = \{c_1, \dots, c_t\} \subset \mathbb{Z}$ զույների բազմության համար $f : E(G) \rightarrow C$ արտապատկերումը կոչվում է G գրաֆի *ճիշտ կողային ներկում*, եթե $\forall v \in V(G)$ գազաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր զույներով: Եթե $\forall i$ թվի համար, որտեղ $1 \leq i \leq t$, գոյություն ունի $e_i \in E(G)$ այնպիսին, որ $f(e_i) = c_i$, ապա f -ը կանվանենք G գրաֆի *ճիշտ կողային t -ներկում*:

Տրված G գրաֆի ճիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ զույների նվազագույն քանակը կոչվում է *քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'(G)$ -ով: Վիզինգի հայտնի թեորեմի համաձայն^{17,18}

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1:$$

Հայտնի է, որ $\chi'(G)$ -ի որոշման խնդիրը NP-լիով է¹⁹:

Եթե f -ը G -ի ճիշտ կողային ներկում է, ապա կամայական v գազաթի *սպեկտրը*՝ $S(v, f)$ բազմությունը, այդ գազաթին կից կողերի զույների բազմությունն է: Պարզ է, որ երբ f -ը ճիշտ ներկում է, $|S(v, f)| = d_G(v)$ ցանկացած $v \in V(G)$ գազաթի համար: f ճիշտ կողային k -ներկումը կանվանենք *գազաթներ տարբերակող կողային k -ներկում*, եթե ցանկացած երկու $u, v \in V(G)$ գազաթների համար տեղի ունի $S(u, f) \neq S(v, f)$ անհավասարությունը: Եթե տրված G գրաֆի համար գոյություն ունի գազաթներ տարբերակող կողային ներկում, ապա անհրաժեշտ զույների նվազագույն քանակը կոչվում է *գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'_{vd}(G)$ -ով:

Կամայական $k \in N$ թվի և $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ բազմության համար $S \oplus k$ բազմությունը սահմանենք հետևյալ կերպ.

$$S \oplus k = \{s_1 + k, \dots, s_n + k\}:$$

Եթե տրված G գրաֆի համար գոյություն ունի գազաթներ տարբերակող կողային k -ներկում, ապա կամայական $1 \leq d \leq \Delta(G)$ թվի համար $\binom{k}{d} \geq n_d$, որտեղ n_d -ն d աստիճան ունեցող գազաթների քանակն է: Կատարենք հետևյալ նշանակումը.

$$\pi(G) = \min\{k : \binom{k}{d} \geq n_d \text{ ցանկացած } 1 \leq d \leq \Delta(G) \text{ թվի համար}\}:$$

Պարզ է, որ G գրաֆի կամայական գազաթներ տարբերակող կողային ներկում օգտագործում է ամենաքիչը $\pi(G)$ զույներ: Բարիսը և Շելլը ձևակերպել են հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 1.1. *Եթե G գրաֆի համար գոյություն ունի գազաթներ տարբերակող կողային ներկում, ապա*

$$\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1:$$

¹⁷В.Г. Визинг, Об оценке хроматического класса р-графа, Дискретный анализ 3, 1964, стр. 25–30.

¹⁸В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфов, Кибернетика 3, 1965, стр. 29–39.

¹⁹I. Holyer, The NP-completeness of edge coloring, SIAM Journal of Computing 10, 1981, pp. 718–720.

n -չափանի խորանարդի գագաթներ տարբերակող կողային ներկումները առաջին անգամ հետազոտվել են Հորնակի և Սոտակի կողմից: Մասնավորապես, հեղինակների կողմից ստացվել է n -չափանի խորանարդի համար հետևյալ ասիմպտոտիկ գնահատականը²⁰.

Թեորեմ 1.1.1. Եթե $q^* - n (x+1)^{(x+1)} = 2x^x$ հավասարման միակ լուծումն է, ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\chi'_{vd}(Q_n)}{n} = 1 + q^* :$$

Նույն աշխատանքում հեղինակները ձևակերպել են հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 1.2. $\{\chi'_{vd}(Q_n)\}_{n=2}^\infty$ -ը չնվազող հաջորդականություն է:

Այս ամենը կարևոր են դարձնում n -չափանի խորանարդին մոտ գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի հետազոտումը: Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է գրաֆների որոշ դասերի գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ստորին և վերին գնահատականներին: Մասնավորապես, աշխատանքում ստացվել են որոշ ընդհանրացված Ֆիբոնաչիի և Լուկասի խորանարդների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ճշգրիտ արժեքներ, ինչպես նաև լրիվ տրոհվող, հոդմադաց և թագ գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ստորին և վերին գնահատականներ: Պետք է նշել, որ բոլոր ստացված գնահատականները հաստատում են Հիպոթեզ 1.1-ը վերը նշված գրաֆների դասերի համար:

1.1 պարագրաֆում ստացվել են որոշ ընդհանրացված Ֆիբոնաչիի խորանարդների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի ճշգրիտ արժեքներ.

Թեորեմ 1.1.2. Եթե $n \geq 4$ և t -ն հնարավոր ամենափոքր թիվն է, որի համար $\binom{t}{2} \geq n - 2$, ապա

$$\chi'_{vd}(Q_n(11)) = \chi'_{vd}(Q_n(00)) = n$$

$$\chi'_{vd}(Q_n(01)) = \chi'_{vd}(Q_n(10)) = \begin{cases} t+2, & \text{երբ } t\text{-ն կենտ է և } \binom{t}{2} - 2 \leq n \leq \binom{t}{2} - 1 \\ & \text{կամ } t\text{-ն զույգ է և } n > \frac{t^2-2t}{2}, \\ t+1, & \text{հակառակ դեպքում:} \end{cases}$$

Նույն պարագրաֆում ստացվել են նաև որոշ ընդհանրացված Լուկասի խորանարդների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ճշգրիտ արժեքներ.

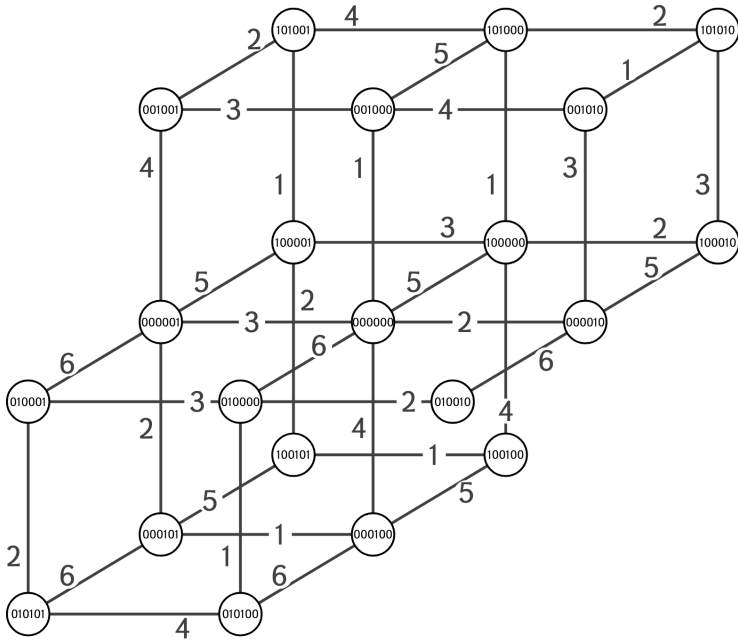
Թեորեմ 1.1.3. Կամայական $n \geq 2$ բնական թվի համար սրույգ է՝

$$\chi'_{vd}(L_n(11)) = \chi'_{vd}(L_n(00)) = n:$$

Հարկ է նշել, որ $L_n(01)$ և $L_n(10)$ գրաֆների համար գոյություն չունի գագաթներ տարբերակող կողային ներկում:

1.2 պարագրաֆը նվիրված է լրիվ տրոհվող գրաֆների գագաթներ տարբերակող կողային ներկումների հետազոտմանը: Մասնավորապես, ստացվել են այդ գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի հետևյալ ստորին և վերին գնահատականները.

²⁰M. Hornak, R. Sotak, Asymptotic behaviour of the observability of Q_n . Discrete Mathematics 176(1-3), 1997, pp.139-148.



Նկ. 1.1: $Q_6(11)$ -ի գագաթներ տարբերակող կոդային 6-ներկում:

Թեորեմ 1.2.1. Կամայական $m, n \geq 2$ թվերի համար

- 1) եթե $n + m$ -ը կենտ է կամ $n \geq m$, ապա $\chi'_{vd}(CS_{n,m}) = n + m$,
- 2) եթե $n + m$ -ը զույգ է և $n < m$, ապա $n + m \leq \chi'_{vd}(CS_{n,m}) \leq n + m + 1$:

1.3 պարագրաֆը նվիրված է առաջին տիպի ընդհանրացված հողմաղաց գրաֆների գագաթներ տարբերակող կոդային ներկումների հետազոտմանը: Մասնավորապես, այս պարագրաֆում ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1.3.1. Կամայական $k, n \geq 2$ թվերի համար ստույգ է՝

- 1) $\chi'_{vd}(W(2, 2)) = 5$,
- 2) $\chi'_{vd}(W(k, n)) = k \cdot n$, երբ $k > 2$ կամ $n > 2$:

Թեորեմ 1.3.2. Կամայական n, k, l բնական թվերի համար, որպեսզի $2 \leq l < n \cdot k$, ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\chi'_{vd}(W'(n, k, l)) = n \cdot k + l :$$

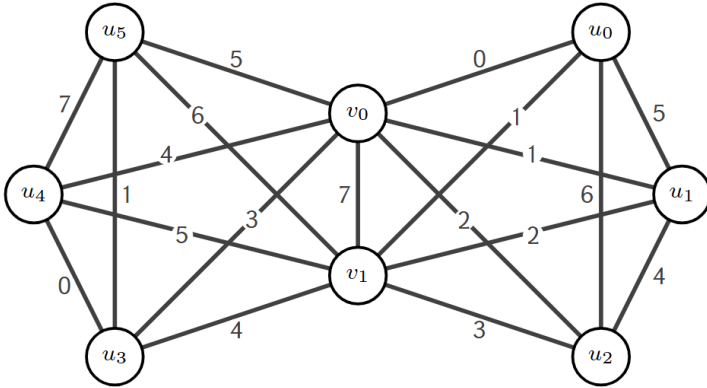
1.4 պարագրաֆում ստացվել են հետևյալ վերին և ստորին գնահատականները թագ գրաֆների գագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար.

Թեորեմ 1.4.1. Կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$n + 1 \leq \chi'_{vd}(H_{n,n}) \leq n + 2 :$$

Օգտագործելով համակարգչային էկսպերիմենտը հաջողվել է ցույց տալ, որ $H_{n,n}$ գրաֆի համար գոյություն չունի զագաթներ տարբերակող կողային $(n + 1)$ -ներկում $n = 3$ և $n = 4$ դեպքերում, ինչից հետևում է, որ վերին գնահատականը հասանելի է:

Հարկ է նշել, որ թագ գրաֆները կարևոր դեր են խաղում գրաֆների տեսության ներկման խնդիրներում, մասնավորապես, դրանք օգտագործվում են ցույց տալու համար, որ ճիշտ զագաթային ներկման համար ազահ ալգորիթմը կարող է ինչքան ասես սխալվել:



Նկ. 1.2: $W'(2, 3, 2)$ -ի զագաթներ տարբերակող կողային 8-ներկում:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների զագաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրների հետազոտմանը:

Լրիվ բազմակողմանի գրաֆներից առաջինը ուսումնասիրվել են լրիվ երկկողմանի գրաֆները: Բարիսը և Շելպը ստացել են լրիվ և լրիվ երկկողմանի գրաֆների զագաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների արժեքները:

Թեորեմ 2.1.1. Կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար, ստույգ է՝

$$\chi'_{vd}(K_n) = \begin{cases} n, & \text{եթե } n\text{-ը կենտր է,} \\ n + 1, & \text{եթե } n\text{-ը զույգ է:} \end{cases}$$

Թեորեմ 2.1.2. Կամայական m և n բնական թվերի համար, ստույգ է՝

$$\chi'_{vd}(K_{m,n}) = \begin{cases} n + 1, & \text{եթե } n > m \geq 2, \\ n + 2, & \text{եթե } n = m \geq 2: \end{cases}$$

2.1 պարագրաֆում տրվել են լրիվ բազմակողմանի գրաֆների զագաթներ տարբերակող կողային ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի ստորին և վերին գնահատականներ: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 2.1.3. Կամայական $n_1, n_2, \dots, n_r$ բնական թվերի համար, որպեսզի $r \geq 5$ և $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$, ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները.

1) երբ $n_1, n_2, \dots, n_r$ թվերը իրարից փարբեր են,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} + 1 \leq \chi'_{vd}(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \leq n_1 + n_2 + \dots + n_r,$$

2) երբ $n_1, n_2, \dots, n_r$ թվերից գոնե երկուսը համընկնում են,

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{r-1} + 1 \leq \chi'_{vd}(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \leq n_1 + n_2 + \dots + n_r + 1 :$$

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են լրիվ երեք կողմանի գրաֆների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումները: Մասնավորապես, ստացվել են որոշ լրիվ 3-կողմանի գրաֆների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի ճշգրիտ արժեքներ:

Թեորեմ 2.2.1. Կամայական m, n բնական թվերի համար ստույգ են հետևյալ հավասարությունները.

1) եթե $m \geq n = 1$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m, n, 1}) = m + 2$,

2) եթե $m \geq n > 1$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m, n, 1}) = m + n$:

Թեորեմ 2.2.2. Կամայական $K_{m, n, 2}$ ($m \geq 2, n \geq 2$) գրաֆի համար ստույգ է՝

1) եթե $m = n = 2$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m, n, 2}) = 6$,

2) եթե $m \geq n > 2$ կամ $m > n = 2$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m, n, 2}) = m + n + 1$:

Թեորեմ 2.2.3. Եթե m, n, l -ը բնական թվեր են, որպեսզի $2 \leq l < n \leq m$ և $2l \leq m$, ապա

$$\chi'_{vd}(K_{m, n, l}) = m + n + 1:$$

2.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են լրիվ չորս կողմանի գրաֆների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: Նշենք, որ Հորնակի և Սոտակի կողմից²¹ աշխատանքում ստացվել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 2.3.1. Կամայական $n \geq 2$ բնական թվի համար ստույգ է՝

$$\chi'_{vd}(K_{n, n, n, n}) = 3n + 2:$$

2.3 պարագրաֆում ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 2.3.2. Դիցուք m, n, k, l -ը կամայական իրարից փարբեր թվեր են ($m > n > k > l \geq 2$): Այդ դեպքում՝

1) եթե $n + k \geq m + l$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m, n, k, l}) = m + n + k + 1$,

2) եթե $n + k < m + l$, ապա $m + n + k + 1 \leq \chi'_{vd}(K_{m, n, k, l}) \leq 2m + l + 1$:

²¹M. Hornak, R. Sotak, Observability of complete multipartite graphs with equipotent parts, Ars Combinatoria 41, 1995, pp. 289–301.

Թեորեմ 2.3.3. Կամայական իրարից տարբեր m, n բնական թվերի համար ստույգ է հետևյալը.

- 1) եթե $1 = n < m$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) = 2m + 2$,
- 2) եթե $2 \leq n < m - 1$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) = n + 2m + 1$,
- 3) եթե $2 \leq n = m - 1$, ապա $2m + n + 1 \leq \chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) \leq 2m + n + 2$:

Թեորեմ 2.3.4. Կամայական m, n բնական թվերի համար ստույգ է հետևյալը.

- 1) եթե $2 \leq m < n$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m,n,n,n}) = 3n + 1$,
- 2) եթե $m > n \geq 2$, ապա $m + 2n + 1 \leq \chi'_{vd}(K_{m,n,n,n}) \leq 2m + n + 1$:

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆային գործողությունների գազաթնքի տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրների հետազոտմանը:

Երրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում տրվել են ստորին և վերին գնահատականներ գրաֆների կորոնա արտադրյալների գազաթնքի տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար: Հարկ է նշել, որ գրաֆների կորոնա արտադրյալը սահմանվել է 1970 թվականին Ֆրախտի և Հարարիի կողմից²² աշխատանքում: ^{23,24} աշխատանքներում ուսումնասիրվել են որոշ ներկումների քրոմատիկ պարամետրերը գրաֆների կորոնա արտադրյալի համար: 3.1 պարագրաֆում ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 3.1.1. Եթե G -ն և H -ը համապատասխանաբար $n \geq 3$ և $m \geq 3$ գազաթնքերով գրաֆներ են, որոնք չունեն մեկուսացված կողեր կամ մեկից ավելի մեկուսացված գազաթնքեր, ապա ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝

- 1) $\Delta(G) + m \leq \chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max \{ \chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H) \} + m$, երբ $m \geq n$,
- 2) $\Delta(G) + m \leq \chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max \{ \chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H) \lceil \frac{n}{m} \rceil \} + m$, երբ $m < n$:

Թեորեմ 3.1.2. Դիցուք G և H գրաֆներն ունեն համապատասխանաբար $n \geq 3$ և $m \geq 3$ գազաթնքեր և չեն պարունակում մեկուսացված կողեր կամ մեկից ավելի մեկուսացված գազաթնքեր: Եթե H գրաֆի համար գոյություն ունի $\chi'_{vd}(H)$ գույներով այնպիսի գազաթնքեր տարբերակող կողային f_H ներկում, որ ցանկացած $w, z \in V(H)$ գազաթնքերի համար գոյություն չունի այնպիսի $k \in \mathbb{N}$, որ $S(w, f_H) \oplus k = S(z, f_H)$, ապա

$$\chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max \{ \chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H) + \lfloor \frac{n-1}{m} \rfloor \} + m:$$

Հետևանք 3.1.3. Եթե $n \geq m \geq 3$, ապա ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները.

- 1) $n + m \leq \chi'_{vd}(K_n \circ K_m) \leq n + m + 1$, երբ m -ը կենսի է,
- 2) $n + m \leq \chi'_{vd}(K_n \circ K_m) \leq n + m + 3$, երբ m -ը զույգ է:

²²R.W. Frucht, F. Harary, On the corona of two graphs, Aequationes Mathematicae 4, 1970, pp. 322–325.

²³S. Verma, B.S. Panda, Adjacent vertex distinguishing total coloring of the corona product of graphs, Discussiones Mathematicae Graph Theory 44, 2024, p. 317.

²⁴H. Furmanczyk, K. Kaliraj, M. Kubale, V. Vivin, Equitable coloring of corona products of graphs. Advances and Applications in Discrete Mathematics 11(2), 2013, pp. 103–120.

3.2 պարագրաֆում ստացվել են գրաֆների գումարի գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի ստորին և վերին գնահատականներ: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ երկու թեորեմները.

Թեորեմ 3.2.1. *Եթե G -ն և H -ը համապատասխանաբար $n \geq 3$ և $m \geq 3$ գազաթներով գրաֆներ են, որոնք չեն պարունակում մեկուսացված կողեր և պարունակում են մեկից ոչ ավելի մեկուսացված գազաթներ, ապա ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները.*

1) երբ $m \neq n$,

$$\max\{\Delta(G) + m, \Delta(H) + n\} \leq \chi'_{vd}(G + H) \leq \max\{\chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H)\} + \max(m, n),$$

2) երբ $m = n$,

$$\max\{\Delta(G), \Delta(H)\} + n \leq \chi'_{vd}(G + H) \leq \max\{\chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H)\} + n + 1:$$

Թեորեմ 3.2.2. *Եթե G -ն և H -ը համապատասխանաբար $n \geq 2$ և $m \geq 2$ գազաթներով գրաֆներ են, ապա ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները.*

1) եթե $m \neq n$, ապա

$$\max\{\Delta(G) + m, \Delta(H) + n\} \leq \chi'_{vd}(G + H) \leq \max\{\Delta(G), \Delta(H)\} + \max(m, n) + 2,$$

2) եթե $m = n$, ապա

$$\max\{\Delta(G), \Delta(H)\} + n \leq \chi'_{vd}(G + H) \leq \max\{\Delta(G), \Delta(H)\} + n + 3:$$

Հետևանք 3.2.3. *Ցանկացած m, n բնական թվերի համար ստույգ են հետևյալ պնդումները.*

1) եթե $m \geq n \geq 4$, ապա $\chi'_{vd}(F_{m,n}) = m + 3$,

2) եթե $2 \leq m < n - 2$, ապա $\chi'_{vd}(F_{m,n}) = n + 1$,

3) եթե $3 \leq m = n - 1$, ապա $\chi'_{vd}(F_{m,n}) = n + 2$:

3.3 պարագրաֆում տրվել է գրաֆների դեկարտյան գումարի գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատական: Նշենք, որ Բարիլը, Կեդուկին և Տոգնին²⁵ աշխատանքում G և H գրաֆների $G[H]$ կոմպոզիցիայի համար ստացել են գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատական:

Թեորեմ 3.3.1. *Կամայական K_2 -ից փարբեր G և H կապակցված գրաֆների համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\chi'_{vd}(G[H]) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1)\chi'(G):$$

3.3 պարագրաֆում ապացուցվել է հետևյալ արդյունքը.

Թեորեմ 3.3.2. *Կամայական K_2 -ից փարբեր G և H կապակցված գրաֆների համար տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը.*

$$\chi'_{vd}(G \oplus H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1)\chi'(G) + \Delta(H) \cdot \chi'(\overline{G}):$$

²⁵J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Vertex distinguishing edge- and total-colorings of Cartesian and other product graphs, Ars Combinatoria 107, 2012, pp. 109-127.

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Այս աշխատանքում հետազոտվել են գրաֆների տարբեր դասերի գազաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրները: Ավելին, դիտարկվել են նաև գրաֆային տարբեր գործողությունների գազաթներ տարբերակող կողային ներկումների կառուցման և դրանց քրոմատիկ ինդեքսների գնահատման խնդիրները՝ արտահայտված գրաֆների այլ քրոմատիկ պարամետրերից:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1) Որոշ ընդհանրացված Ֆիբոնաչիի խորանարդների և Լուկասի խորանարդների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսների ճշգրիտ արժեքներ, մասնավորապես, ապացուցել է, որ $\chi'_{vd}(Q_n(11)) = \chi'_{vd}(Q_n(00)) = n$ և $\chi'_{vd}(L_n(11)) = \chi'_{vd}(L_n(00)) = n$,

2) Գրաֆների տարբեր դասերի համար հաստատվել է գազաթներ տարբերակող կողային ներկման հիմնական հիպոթեզը, համաձայն որի կամայական G գրաֆի համար $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1$,

3) Ստորին և վերին գնահատականներ լրիվ բազմակողմանի գրաֆների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար, իսկ որոշ դեպքերում՝ ճշգրիտ արժեքներ, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ եթե $2 \leq n < m-1$, ապա $\chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) = n+2m+1$,

4) Հասանելի գնահատականներ գրաֆների կորոնա արտադրյալների գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար, մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ եթե G -ն և H -ը համապատասխանաբար $n \geq 3$ և $m \geq 3$ գազաթներով գրաֆներ են, որոնք չունեն մեկուսացված կողեր կամ մեկից ավելի մեկուսացված գազաթներ, ապա $\Delta(G) + m \leq \chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max \{ \chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H) \} + m$,

5) Վերին գնահատականներ գրաֆների գումարի և դեկարտյան գումարի գազաթներ տարբերակող քրոմատիկ ինդեքսի համար, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ կամայական K_2 -ից տարբեր G և H կապակցված գրաֆների համար $\chi'_{vd}(G \oplus H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1)\chi'(G) + \Delta(H) \cdot \chi'(G)$:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. Т. Петросян, П. Петросян, Вершинно-различающие реберные раскраски полных трехдольных графов, XIV Годичная научная конференция РАУ (Сборник статей), Ереван, Армения, 2020, стр. 46-48,
2. T. Petrosyan, P. Petrosyan, Vertex-distinguishing edge colorings of some complete multipartite graphs (1), International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, 2021, pp. 69-70,
3. T. Petrosyan, A. Drambyan, Vertex-Distinguishing Edge Colorings of Some Complete Tripartite Graph, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 2, 2022, pp. 7-18,
4. P. Petrosyan, T. Petrosyan, Vertex-Distinguishing Edge Colorings of some Complete Multipartite Graphs (2), Katchar Scientific Periodical, 2, 2022, pp. 136-143,
5. T. Petrosyan, P. Petrosyan, Vertex-Distinguishing Edge Coloring of Fibonacci Cubes,

14th International Conference on Computer Science and Information Technologies (CSIT-2023), 2023, pp. 144–146,

6. Т. Петросян, П. Петросян, Вершинно-различающая рёберная раскраска кубов Лукаса, XVII Годичная научная конференция РАУ (Сборник статей), Ереван, Армения, 2024, стр. 44–46,
7. T. Petrosyan, Vertex distinguishing proper edge colorings of the corona products of graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 58 (2), 2024, pp. 47–56,
8. T. Petrosyan, Vertex distinguishing proper edge colorings of the join graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 59 (1), 2025, pp. 10–19,
9. T. Petrosyan, Vertex Distinguishing Proper Edge Colorings of the Cartesian Sum of graphs, Abstracts of the conference "Current Issues in Computer Science and Applied Mathematics 2025", YSU, Yerevan, 2025, pp. 58–59,
10. T. Petrosyan, On vertex distinguishing proper edge colorings of the cartesian sum of graphs, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences) 1, 2025, pp. 26–32,
11. П. Петросян, Т. Петросян, Вершинно-различающие реберные раскраски одного класса графов, Вестник Российско-Армянского университета (серия: физико-математические и естественные науки) 1, 2025, pp. 41–52:

Abstract

Graph colorings play an important role in discrete mathematics. The reason for that is the fact that these problems are closely related to different real-life problems, including problems of scheduling theory, frequency assignment problems in wireless radio communication networks, irregular network problems, etc.. In particular, some problems related to irregular networks can be modeled using vertex-distinguishing edge colorings of graphs. The presented work is devoted to the study of vertex-distinguishing edge colorings of graphs.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges, respectively. The maximum degree of vertices in graph G is denoted by $\Delta(G)$. The *complement* of a graph G is the graph $\overline{G}$, where $V(\overline{G}) = V(G)$ and $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(\overline{G}) \text{ and } uv \notin E(G)\}$.

For any $n \in \mathbb{N}$, $Q_n(f)$ denotes the *generalized n -dimensional Fibonacci cube*, where

- $V(Q_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ and the sequence } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ does not contain the substring } f\}$;
- $E(Q_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ and } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ differ in exactly one position}\}$.

For any $n \in \mathbb{N}$ and any substring f of length less than n , $L_n(f)$ denotes the *generalized n -dimensional Lucas cube*, where

- $V(L_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ and the sequence } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ does not contain } f\}$;
- $E(L_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ and } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ differ in exactly one position}\}$.

A graph G is called a *complete r -partite* ($r \geq 2$) graph if its vertices can be partitioned into r independent sets $V_1, \dots, V_r$ such that each vertex in V_i is adjacent to all the other vertices in V_j for $1 \leq i < j \leq r$. Let $K_{n_1, \dots, n_r}$ denote a complete r -partite graph with independent sets $V_1, V_2, \dots, V_r$ of sizes $n_1, n_2, \dots, n_r$.

The *corona product* of graphs G and H , denoted by $G \circ H$, consists of one copy of G and $|V(G)|$ copies of H , where the i -th vertex of G is connected to every vertex of the i -th copy of H for any $1 \leq i \leq |V(G)|$.

The *sum* of graphs G and H , denoted by $G + H$, is the graph defined as follows:

- $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$,
- $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{v_i v_j : v_i \in V(G), v_j \in V(H)\}$.

The *Cartesian sum* of graphs G and H , denoted by $G \oplus H$, is the graph defined as follows:

- $V(G \oplus H) = V(G) \times V(H)$,
- $E(G \oplus H) = \{(v_1 u_1)(v_2 u_2) : v_1 v_2 \in E(G) \text{ or } u_1 u_2 \in E(H)\}$.

For set of colors $C = \{c_1, \dots, c_t\} \subset \mathbb{Z}$, a mapping $f : E(G) \rightarrow C$ is called a *proper edge coloring* of graph G if $f(e) \neq f(e')$ for every pair of adjacent edges e and e' . The minimum number of colors required for a *proper coloring* of a graph G is denoted by $\chi'(G)$.

If f is a proper edge coloring of a graph G , then the *spectrum* of a vertex v , denoted by $S(v, f)$, is the set of all colors appearing on edges incident to v . A proper edge coloring f is called a *vertex-distinguishing edge coloring* if $S(u, f) \neq S(v, f)$ for any two distinct vertices u and v in G . The minimum number of colors required for a vertex-distinguishing edge coloring of a graph G without isolated edges and with at most one isolated vertex is called the *vertex distinguishing chromatic index* and denoted by $\chi'_{vd}(G)$.

If there exists a vertex-distinguishing edge coloring with k colors for a given graph G , then for any $1 \leq d \leq \Delta(G)$, the inequality $\binom{k}{d} \geq n_d$ holds, where n_d is the number of vertices of degree d . We introduce the following notation:

$$\pi(G) = \min\{k : \binom{k}{d} \geq n_d \text{ for every } 1 \leq d \leq \Delta(G)\}.$$

Clearly, for each graph G that has a vertex-distinguishing edge coloring, $\chi'_{vd}(G) \geq \pi(G)$. In 1997, Burris and Schelp posed the following conjecture: if the graph G has a vertex-distinguishing edge coloring, then $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1$.

In this dissertation, we consider the problems of constructing and bounding the numerical parameters of vertex-distinguishing edge colorings of various classes of graphs. The work also addresses the the problems of constructing and bounding the numerical parameters of vertex-distinguishing edge colorings of different graph operations in terms of chromatic parameters of factors.

In particular, the following results were obtained.

1. The exact values of the vertex-distinguishing chromatic indices for certain generalized Fibonacci and Lucas cubes are determined, in particular, it is proved that $\chi'_{vd}(Q_n(11)) = \chi'_{vd}(Q_n(00)) = n$ and $\chi'_{vd}(L_n(11)) = \chi'_{vd}(L_n(00)) = n$.
2. The Burris-Schelp conjecture on vertex-distinguishing edge colorings of graphs, which states that $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1$ for any graph G , is confirmed for some classes of graphs.
3. Lower and upper bounds on the vertex-distinguishing chromatic index of complete multipartite graphs and the exact values of the parameter in some cases are obtained, in particular, it is proved that if $2 \leq n < m - 1$, then $\chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) = n + 2m + 1$.
4. Sharp bounds on the vertex-distinguishing chromatic index of corona products of graphs are derived, in particular, it is shown that if G and H are graphs with $n \geq 3$ and $m \geq 3$ vertices, respectively, neither of which has isolated edges or more than one isolated vertex, then $\Delta(G) + m \leq \chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max\{\chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H) \lceil \frac{n}{m} \rceil\} + m$.
5. Upper bounds on the vertex-distinguishing chromatic index of the sum and Cartesian sum of graphs are obtained, in particular, it is proved that for any connected graphs G and H different from K_2 , the inequality $\chi'_{vd}(G \oplus H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1)\chi'(G) + \Delta(H) \cdot \chi'(\overline{G})$ holds.

Резюме

Раскраски графов занимают особое место в дискретной математике. Это обусловлено тем, что задачи раскрасок графов тесно связаны с различными прикладными задачами, среди которых стоит отметить задачи теории расписаний, задачи назначения частот в беспроводных радиосетях, задачи нерегулярных сетей и другие. В частности, с помощью вершинно-различающих реберных раскрасок графов можно моделировать некоторые задачи, относящиеся к нерегулярным сетям. Представленная работа посвящена исследованию вершинно-различающих реберных раскрасок графов.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Пусть $V(G)$ — множество вершин графа G , $E(G)$ — множество ребер графа G , а $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин в графе G . *Дополнением* графа G называется граф $\overline{G}$, для которого $V(\overline{G}) = V(G)$ и $E(\overline{G}) = \{uv : u, v \in V(\overline{G}) \text{ и } uv \notin E(G)\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$, через $Q_n(f)$ обозначается *обобщённый n -мерный куб Фибоначчи*, для которого

- $V(Q_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0,1\} \text{ и последовательность } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ не содержит подстроку } f\}$;
- $E(Q_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ и } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ различаются ровно в одной позиции}\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой подстроки f , длина которой меньше n , через $L_n(f)$ обозначается *обобщённый n -мерный куб Лукаса*, для которого

- $V(L_n(f)) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0,1\} \text{ и последовательность } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ не содержит } f\}$;
- $E(L_n(f)) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ и } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ различаются ровно в одной позиции}\}$.

Граф G называется *полным r -дольным графом* ($r \geq 2$), если множество его вершин можно разбить на r независимых подмножеств $V_1, \dots, V_r$ так, что каждая вершина из V_i соединена со всеми вершинами из V_j , при $1 \leq i < j \leq r$. Полный r -дольный граф с независимыми подмножествами $V_1, V_2, \dots, V_r$ размеров $n_1, n_2, \dots, n_r$, соответственно, обозначим через $K_{n_1, \dots, n_r}$.

Короной графов G и H называется граф $G \circ H$, который состоит из одной копии G и $|V(G)|$ копий H , причём каждая вершина i -ой копии H соединена с i -ой вершиной графа G . Суммой графов G и H называется граф $G+H$, для которого $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ и $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{v_i v_j : v_i \in V(G), v_j \in V(H)\}$. Декартовой суммой графов G и H называется граф $G \oplus H$, для которого $V(G \oplus H) = V(G) \times V(H)$ и $E(G \oplus H) = \{(v_1 u_1)(v_2 u_2) : v_1 v_2 \in E(G) \text{ или } u_1 u_2 \in E(H)\}$.

Для любого множества $C = \{c_1, \dots, c_t\} \subset \mathbb{Z}$ отображение $f : E(G) \rightarrow C$ называется *правильной рёберной раскраской* графа G , если $f(e) \neq f(e')$ для любых смежных рёбер e и e' графа G . Наименьшее число цветов, необходимое для правильной рёберной раскраски графа G , обозначается через $\chi'(G)$. Если f — правильная рёберная раскраска графа G , то через $S(v, f)$ обозначается множество цветов рёбер, инцидентных вершине v . Правильная рёберная раскраска f графа G называется *вершинно-различающей*, если для

любых различных вершин u и v графа G , $S(u, f) \neq S(v, f)$. Наименьшее число цветов, необходимое для вершинно-различающей рёберной раскраски графа G , обозначается через $\chi'_{vd}(G)$.

Если для графа G существует вершинно-различающая рёберная раскраска, использующая k цветов, то для любого $1 \leq d \leq \Delta(G)$ выполняется неравенство $\binom{k}{d} \geq n_d$, где n_d — число вершин степени d . Введём следующее обозначение:

$$\pi(G) = \min\{k : \binom{k}{d} \geq n_d \text{ for every } 1 \leq d \leq \Delta(G)\}.$$

Ясно, что для любого графа G , которая обладает вершинно-различающей рёберной раскраской, имеет место $\chi'_{vd}(G) \geq \pi(G)$. В 1997 году Баррисом и Шелпом была предложена следующая гипотеза: если граф G обладает вершинно-различающей рёберной раскраской, то $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1$.

В настоящей работе рассматриваются задачи построения и оценки числовых параметров вершинно-различающих рёберных раскрасок некоторых классов графов, а также рассматриваются задачи построения и оценки вершинно-различающих хроматических индексов различных операций над графами в терминах хроматических параметров исходных графов.

В частности, получены следующие результаты:

1. найдены точные значения вершинно-различающего хроматического индекса для некоторых обобщённых кубов Фибоначи и Лукаса, в частности, доказано, что $\chi'_{vd}(Q_n(11)) = \chi'_{vd}(Q_n(00)) = n$ и $\chi'_{vd}(L_n(11)) = \chi'_{vd}(L_n(00)) = n$;
2. гипотеза Барриса и Шелпа о вершинно-различающей рёберной раскраске, согласно которой $\pi(G) \leq \chi'_{vd}(G) \leq \pi(G) + 1$ для любого графа G , подтверждена для некоторых классов графов;
3. получены нижние и верхние оценки вершинно-различающего хроматического индекса для полных многодольных графов, а в некоторых случаях найдены точные значения этого параметра, в частности, доказано, что если $2 \leq n < m - 1$, то $\chi'_{vd}(K_{m,m,n,n}) = n + 2m + 1$;
4. найдены достижимые оценки вершинно-различающего хроматического индекса короны графов, в частности, доказано, что если графы G и H имеют, соответственно, $n \geq 3$ и $m \geq 3$ вершин и при этом не содержат изолированных рёбер или более одной изолированной вершины, то $\Delta(G) + m \leq \chi'_{vd}(G \circ H) \leq \max\{\chi'_{vd}(G), \chi'_{vd}(H)\} \lceil \frac{n}{m} \rceil + m$;
5. получены верхние оценки вершинно-различающего хроматического индекса суммы и декартовой суммы графов, в частности, доказано, что для любых связных графов G и H , отличных от K_2 , выполняется неравенство $\chi'_{vd}(G \oplus H) \leq \chi'_{vd}(G) + \chi'_{vd}(H) + (|V(H)| - 1)\chi'(G) + \Delta(H) \cdot \chi'(G)$.

