ՀՀ ԳԱԱ ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

Սահակյան Հասմիկ Արտեմի

ԴԻՍԿՐԵՏ ՄՈԴԵԼՆԵՐՈՒՄ ՄԱՍՆԱԿԻ ԲՆՈՒԹԱԳՐՄԱՄԲ ՏՐՎՈՂ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ԳՈՅՈՒԹՅՈՒՆ, ԿԱՌՈՒՑՈՒՄ, ՆԿԱՐԱԳՐՈՒՄ

Ե.13.05 “Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի համալիրներ” մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Երևան – 2018

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ НАН РА

Саакян Асмик Артемовна

СУЩЕСТВОВАНИЕ, ПОСТРОЕНИЕ И ОПИСАНИЕ СТРУКТУР, ЗАДАННЫХ В ЧАСТИЧНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности Е.13.05 - «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Ереван - 2018

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում:

Գիտական խորհրդատու՝	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Լ.Հ.Ասլանյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	տեխ. գիտ. դոկտոր	Գ.Հ.Խաչատրյան
	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Մ.Դայդե
	ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր	Յու.Ռ.Հակոբյան

Առաջատար կազմակերպություն՝
Լոմոնոսովի անվան Մոսկվայի պետական համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2018թ. հունիսի 7-ին, ժ. 16:00-ին ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 «Ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0014, Պ. Սևակի 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ՀՀ ԳԱԱ ԻԱՊԻ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2018թ. մայիսի 7-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական
քարտուղար, ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Հ. Գ. Սարուխանյան

Тема диссертации утверждена в Институте проблем информатики и автоматизации НАН РА

Научный консультант:	доктор физ.-мат. наук	Л.А.Асланян
Официальные оппоненты:	доктор тех. наук	Г.Г.Хачатрян
	доктор физ.-мат. наук	М.Дайде
	доктор физ.-мат. наук	Ю.Р.Акопян

Ведущая организация: Московский государственный университет имени Ломоносова

Защита состоится 7-го июня 2018 года в 16:00 часов на заседании специализированного совета 037 «Информатика» Института проблем информатики и автоматизации НАН РА по адресу: 0014, Ереван, ул. П.Севака 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИПИА НАН РА.
Автореферат разослан 7-го мая, 2018.

Ученый секретарь специализированного
совета, доктор физ.-мат. наук А.Г. Саруханян

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը

<u>Թեմայի արդիականությունը</u>

Աշխատանքը նվիրված է դիսկրետ մոդելավորման մաթեմատիկական խնդիրների ուսումնասիրմանը: Դիսկրետ մոդելները, որոնցում հայտնի են առարկայի միայն որոշակի մասնակի բնութագրեր, առնչվում են ըստ տրված բնութագրերի առարկայի գոյության, կառուցման և նկարագրման խնդիրների հետ: Նրանք առաջ են գալիս գիտական տարբեր տիրույթներում և բազմաթիվ կիրառական խնդիրներում, ինչպիսիք են, օրինակ, ցանցերի մոդելավորումը, փորձերի նախագծումը, պատկերների ճանաչումը, և շատ ուրիշներ:

Ամբողջի և նրա մասերի հարաբերակցման սկզբունքների ուսումնասիրումը մաթեմատիկայի զարգացման լուրջ խթան է հանդիսացել: Նշենք երկու խումբ հարակից խնդիրներ և տեսություններ, որոնք ձևավորվել և ուսումնասիրվել են ժամանակի ընթացքում: 1936 թ. Վ. Համբարձումյանը ձևակերպեց հակադարձ խնդիրների մոդելը՝ մաթեմատիկական խնդիրների դասեր, որոնք ծագում են, երբ հարկ կա ստանալ/հաշվել ինֆորմացիա ներքին կամ թաքնված տվյալների մասին, - արտաքին /կամ հասանելի/ չափումների միջոցով: 1965 թ. Յու. Ժուռավլյովը իր “Ինֆորմացիայի հաշվարկման լոկալ ալգորիթմներ” աշխատանքում ձևավորեց լոկալ շրջակայքերի օգնությամբ ընդհանրական գիտելիքի ձեռքբերման սխեման և ապացուցեց, որ որոշ բնական սահմանափակումների դեպքում կան խնդիրներ, որոնք այս դեպքում ալգորիթմական լուծում չունեն:

Այսօր դիսկրետ մոդելավորման տիրույթը ներկայանում է մի շարք ստանդարտ մաթեմատիկական մոտեցումների տեսքով, որոնք ձևավորվել և օգտագործվում են կիրառական խնդիրների լայն դասերի շուրջ: Դիսկրետ մոդելավորման գործիքների թվում են գրաֆների/հիպերգրաֆների տեսությունը, կոմբինատորիկան, գծային և ամբողջարժեք ծրագրավորումը, դիսկրետ տոմոգրաֆիան, խաղերի տեսությունը, ստոխաստիկ պրոցեսների և Մարկովյան շղթաների սխեմաները, բինար ծառերը, և այլք: Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են տիրույթում դեռևս չլուծված խնդիրներ՝ մասնակի բնութագրմամբ տրվող կառուցվածքների գոյության, կառուցման, նկարագրման մոդելների տեսքով՝ հիպերգրաֆների, դիսկրետ տոմոգրաֆիայի, բազմաչափ-բազմարժեք խորանարդի/ցանցի, բինար ծառերի տերմիններով, որոնք մի կողմից ունեն տեսական կարևորություն, մյուսից՝ մասն են հանդիսանում տարբեր կիրառությունների:

<u>Հիպերգրաֆներ:</u> Հիպերգրաֆները մաթեմատիկական մոդելավորման կարևոր գործիք են տարբեր տիրույթների խնդիրների մեկնաբանման համար: Դրանց թվում են ցանցերի մոդելավորման, տվյալների պեղման, գործընթացների պլանավորման և այլ խնդիրներ, որտեղ հիպերգրաֆի գագաթներով ներկայացվում են առարկաներ, իսկ հիպերկողերով տրվում են առարկաների միջև առկա բարդ հարաբերությունները: Հիպերգրաֆի գագաթների աստիճանները, հիպերկողերի հզորությունները, նրանց տարբեր լինելը, մեկը մյուսին չկլանելը, և այլ հատկություններ հանդես են գալիս որպես *մոդելի բնութագրեր կամ սահմանափակումներ:* Հիպերգրաֆային մոդելների տիրույթի հայտնի և բաց խնդիրներից մեկը՝ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդիրը

ներկա աշխատանքի հիմնական նպատակներից մեկն է: Կ. Բերժի[1] ձևակերպմամբ այս խնդիրը հանդիսանում է կարևորագույն տեսական թիրախ, իսկ կիրառություններն ընդգրկում են տրանսպորտային ցանցերի գեներացման, մեծածավալ վեբ ինֆորմացիոն համակարգերի և սոցիալական ցանցերի համագործակցային կառուցվածքների վերլուծման և նման այլ խնդիրներ: Արդեն երեք տասնամյակ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդիրը ակտիվ հետազոտման առարկա է՝ Ա.Դյուդնեյ, Չ.Կոլբորն, Դ.Սթինսոն, Վ.Կոկեյ, Դ.Բիլինգտոն, Պ.Լի, Մ.Կորեն, Ն.ԲհանուՄուրթի, Մ.Սրինիվասան, Ռ.ԻնիԼյու, Կ.Կլիվանս, Վ.Ռեյներ, Ս.Բեհրենս, Մ.Ֆեռարա, և ուրիշներ (տարված հետազոտությունները և ստացված արդյունքները հիմնականում վերաբերվում են համասեռ հիպերգրաֆների մասնավոր դեպքերին), սակայն մինչև այսօր այն մնում է բաց խնդիր ինչպես բարդության գնահատման տեսանկյունից, այնպես էլ լուծումների տիրույթի բնութագրման հարցում: Խնդիրը համարժեք է բազմաչափ բինար խորանարդի գագաթների ենթաբազմությունների տրոհումների հզորությունների նկարագրման խնդրին, որն առաջադրվել է Լ.Ասլանյանի կողմից դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծման կապակցությամբ[2]: *Ներկա աշխատանքում ստացված արդյունքները, որոնք ներկայացվում են ինչպես բազմաչափ խորանարդի, այնպես էլ հիպերգրաֆի տերմիններով, - առաջինն են, որոնք վերաբերվում են հիպերգրաֆների ընդհանուր դեպքին, և որտեղ տրվում է լուծումների տիրույթի ամբողջական նկարագիրը, այդ տիրույթի կառուցվածքն ու հատկությունները:*

Դիսկրետ տոմոգրաֆիա: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի մոդելը առաջացել է կիրառություններից, ինչպիսիք են բժշկական պատկերների վերլուծումը, բյուրեղի կառուցվածքի վերականգնումը ըստ էլեկտրոնային միկրոսկոպի ճառագայթային դիտարկումների և այլն: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայում հիմնական խնդիրը հետևյալն է. T առարկան (օրինակ՝ բազմաչափ ամբողջարժեք ցանցի բջիջների բազմություն) տրված է վերջավոր թվով պրոյեկցիաների միջոցով, և պահանջվում է վերականգնել այն, կամ՝ կառուցել տրված պրոյեկցիաներն ունեցող որևէ առարկա: Հայտնի է, որ տրված պրոյեկցիաներով առարկայի գոյության խնդիրը պատկանում է NP-լրիվ խնդիրների դասին՝ նույնիսկ 2 չափանի ցանցում 3 ոչ զուգահեռ պրոյեկցիաների համար: 2 չափանի ցանցի դեպքում T-ն կարող է ներկայացվել որպես բինար մատրից: 2 օրթոգոնալ պրոյեկցիաների դեպքում խնդիրն ունի բազմանդամային բարդություն; սակայն լուծումների քանակը կարող է շատ մեծ լինել: Վերականգնվող առարկայի որևէ լրացուցիչ նախնական հատկություն /սահմանափակում/, կարող է նեղացնել հնարավոր լուծումների տիրույթը: Գոյության պարզաբանման խնդիրը տարբեր սահմանափակումների առկայությամբ /ուռուցիկություն, կապակցվածություն, և այլն/ հետազոտվել է բազմաթիվ հեղինակների կողմից՝ Ռ.Գարդներ, Պ.Գրիթզման, Ա.ԴելԼունգո, Ե.Բարկուչի, Մ.Նիվա, Ռ.Պինզանի, Գ.Վոեջինջեր, և ուրիշներ: Որոշ դեպքերում ապացուցվել է խնդրի NP-լրիվությունը: Որոշ մասնավոր դեպքեր ունեն լուծման բազմանդամային ալգորիթմներ, բայց և կան խնդիրներ, որոնց բարդության

1 Berge C., Hypergraphs: Combinatorics of Finite Sets, North-Holland, 1989.

2 Асланян Л.А., Изопериметрическая задача и смежные экстремальные задачи для дискретных пространств, Проблемы кибернетики, вып. 36, с. 85-126, 1979.

դասը դեռևս հայտնի չէ: Այս կապակցությամբ պրակտիկ խնդիրների լուծման համար կարևոր է նաև արդյունավետ մոտավոր ալգորիթմների մշակումը, ինչպես և հետազոտումն այն բանի, թե որ սահմանափակումների առկայությունը /բացակայությունն է խնդիրը դարձնում հեշտ լուծելի: *Ներկա աշխատանքում դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներում ներմուծվել է նոր սահմանափակում՝ վերականգնվող բինար մատրիցի տողերի տարբեր լինելը, որն ի հայտ է գալիս նաև կիրառություններում, ինչպես օրինակ, փորձերի նախագծման (design of experiments) խնդիրները: Մշակվել է տրված պրոյեկցիաներով և տարբեր տողերով բինար մատրիցի կառուցման ագահ ալգորիթմ, որը կիրառվել է սահմանափակ ռեսուրսներով կենսաբժշկական փորձերի նախագծման խնդիրներում, ինչպես նաև հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման համակարգում:*

<u>Բազմաչափ բազմարժեք ցանց:</u> Աշխատանքում հետազոտությունների հաջորդ հատվածն անդրադառնում է կիրառական ալգորիթմների մշակմանը մոնոտոնության սահմանափակմանը ենթակա դիսկրետ մոդելների համար: Ընդհանուր առմամբ, խնդիրը մոնոտոն կառուցվածքի վերծանումն է՝ որոշակի մասնավոր արժեքների հարցման ճանապահով: Մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների դեպքում խնդրի օպտիմալ լուծումը՝ հարցումների մինիմալ քանակը, հայտնի է Գ.Հանսելի թեորեմով (1966թ.); համապատասխան ալգորիթմը կառուցվել է բազմաչափ բինար խորանարդը հատուկ տիպի շղթաների տրոհման ճանապարհով: Նմանատիպ ալգորիթմ, սակայն մինիմալ հիշողության օգտագործմամբ, մշակվել է Գ.Տոնոյանի կողմից 1979թ. և Դ.Սոկոլովի կողմից 1982թ.: Բազմարժեք բազմաչափ ցանցում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի դեպքում վերծանման խնդիրը ավելի բարդ է; հայտնի են մինիմալ հարցումների քանակի գնահատականներ, հայտնի է նաև Վ.Ալեքսեևի կողմից 1976թ. առաջարկված ալգորիթմը, որտեղ ալգորիթմի բարդության գնահատականները տրված են ցանցի միջին շերտերի կետերի քանակների տեսքով: *Ներկա աշխատանքում բերվում է նշված գնահատականների պարզեցված և օգտագործելի տեսքը: Առաջարկվել է նաև մոնոտոն բինար ֆունկցիաների վերծանման նոր մոտեցում՝ հիմնված աշխատանքում ներմուծված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդային տրոհման մեթոդի վրա, որի միջոցով հասանելի է դառնում պարզ մեկնաբանելի կառուցվածքների օգտագործումը և հաշվարկների զուգահեռ իրականացումը: Բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդային տրոհումը առաջանում է նաև տվյալների պեղման ասոցիատիվ կանոնների դուրսբերման ընդհանրական մոդելում, որտեղ ի տարբերություն բինար դեպքի, տարրերի առկա կամ բացակա լինելուց բացի հնարավոր է դառնում հաշվի առնել տարրերի պատիկությունը:*

<u>Աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները</u>

Աշխատանքի նպատակը դիսկրետ մաթեմատիկական մոդելավորման սահմանափակումների բավարարման տիպի խնդիրների կարևոր դասերի ուսումնասիրումն է: Սահմանափակումները, որոնց ենթակա են մոդելները, իրական կամ աբստրակտ առարկայի կամ երևույթի պարամետրեր են, որոնք չափված են և ունեն իրական կամ ենթադրյալ արժեքներ: Այդպիսիք են, օրինակ, տրանսպորտային և հեռահաղորդակցման ցանցերի խնդիրները, որոնցում տրված են հանգույցների հարևանության և կապերի կշիռների տիպի սահմանափակումներ: Նշված արժեքներին համապատասխանող մոդելների գոյությունը, դրանց կառուցումը և վերլուծումը հաճախ հանգում են բարդ մաթեմատիկական խնդիրների լուծմանը:

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են արտապատկերումներ՝ սահմանված պրոյեկցիաների և հարևանության շրջակայքերի տեսքով: Առաջին խումբը մեկնաբանվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի և տրոհման կառուցվածքների, երկրորդը՝ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների և հիերարխիկ ծառերի տերմիններով: Իրականում դիտարկվում է մեկ հիմնական խնդիր տարբեր մեկնաբանություններով, որոնցից յուրաքանչյուրը առաջացնում է իր ուրույն մոտեցումները, և որոնց հետևանքները տարածվում և հարստացնում են այլ սահմանման դրվածքները:

Հետազոտությունները տարվել են հետևյալ հիմնական ուղղություններով.

➢ Դիսկրետ մոդելավորման խնդիրներում շրջակայքային արտապատկերումների ուսումնասիրություններ՝ տրված աստիճանային հաջորդականությամբ հիպերգրաֆների գոյության, կառուցման և նկարագրման խնդիրների տեսքով: Այս մասով աշխատանքի հիմնական նպատակն է՝ ստանալ <u>հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության ճշգրիտ նկարագիրը</u>, որը տրվել և վերլուծվել է աշխատանքում՝ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների տերմիններով, ինչն իրենից ներկայացնում է աշխատանքի <u>հիմնական մաթեմատիկական արդյունքներից մեկը</u>:

➢ Հետազոտություններ դիսկրետ տոմոգրաֆիայի տիրույթում, որտեղ հիմնական նպատակն է նոր սահմանափակումների ներառումը շերտային պրոյեկցիաների և տարրերի չվերադրման տեսքով: Սրանք այն սահմանափակումներն են, որոնք հանդես են գալիս կիրառական խնդիրներում և մոդելներում, և արտացոլում են հիպերգրաֆի պարզ լինելու և գագաթների տրված ընդհանրացված աստիճանային հաջորդականություններն ունենալու պայմանները: Աշխատանքի այս մասով կարևոր ձեռքբերում են տոմոգրաֆիայի խնդրի լուծման արդյունավետ ալգորիթմների մշակումը, <u>լոկալ քայլում օպտիմալության ապահովումը</u> և <u>արդյունքի երաշխիքի գնահատումը</u>:

➢ Դիսկրետ մոդելավորման գործիքների ուսումնասիրում: Աշխատանքում ներմուծվել են խորանարդատիպ տրոհման և գումարային հիերարխիաների մոտեցումները, որոնք հավելյալ կիրառությունների հիմք են հանդիսացել, մասնավորապես.

- խորանարդատիպ տրոհման կիրառմամբ մշակվել է բազմարժեք ցանցում <u>մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ</u>՝ խնդիրը հանգեցնելով բինար խորանարդում մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների վերծանմանը: Սա հիմք է հանդիսացել քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղման նոր մոտեցման համար, ինչը նպատակ ունի նոր գործիքներ տրամադրել կիրառական խնդիրների կարիքների համար, ինչպես օրինակ, LOG ֆայլերի վերլուծման օգնությամբ <u>ցանցերի ներխուժման հայտնաբերումը</u>;
- գումարային հիերարխիաների կիրառմամբ կառուցվել է բինար ծառի մոդել, օգտագործելով այն դասակարգման, մասնավորապես՝ <u>գրանշանների ավտոմատ ճանաչման համակարգում</u>:

Աշխատանքի ընդհանուր բնութագիրը ըստ դիտարկված մոդելների, մաթեմատիկական խնդիրների և կիրառությունների ամփոփվում է հետևյալ տեսքով.

Մոդելներ

- Դիսկրետ մաթեմատիկական մոդելներ ուղղաձիգ և շրջակայքային արտապատկերումներով, այդ թվում.
  - *Բազմությունների համակարգեր / Բազմաչափ միավոր խորանարդ*
  - *Դիսկրետ տոմոգրաֆիա / Բինար մատրիցներ*
  - *Խորանարդատիպ տրոհման մոդել / Բազմաչափ բազմարժեք խորանարդ*

Խնդիրներ

- Հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրում
- Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիր նոր սահմանափակումներով
- Դիսկրետ մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանում
- Պատկերների դասակարգում ըստ գրաֆիկական բնութագրերի
- Քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղում

Կիրառություններ

- Տրանսպորտային և հեռահաղորդակցման ցանցեր սահմանափակումներով / Ցանցերի գեներացում
- Փորձերի նախագծում կենսաբժշկական խնդիրներում
- Տպագիր տեքստերի ավտոմատ վերծանում
- Ցանցերի ներխուժման հայտնաբերում

Հետազոտման մեթոդները

Կիրառվում են դիսկրետ մոդելավորման մաթեմատիկական մոտեցումներ՝ դիսկրետ կառուցվածքների տրոհումներ և ձևափոխություններ, ինդուկցիայի սկզբունք, կերպարների վերծանում, հավանականային կոմբինատորիկա, ամբողջարժեք գծային ծրագրավորում: Դիտարկվել է նաև բինար խորանարդի շղթաների տրոհման մոտեցումը, և այն լրացվել է խորանարդատիպ տրոհման գաղափարի միջոցով: Արդյունքների մի հիմնական խումբ հիմնվում է ագահ/գրադիենտ ալգորիթմների կառուցման մեթոդների վրա:

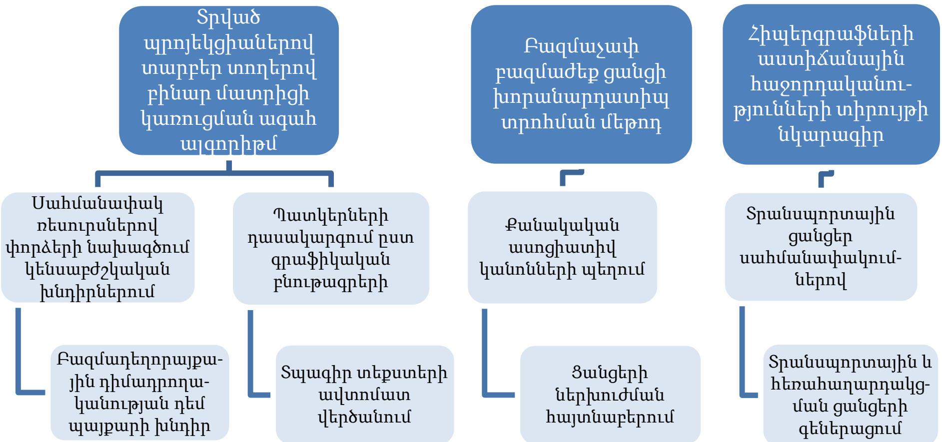
Գիտական նորույթը

- ✓ Պարզ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների տիրույթի ամփոփ նկարագիր՝ տրված մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների տերմիններով; նշված տիրույթի կարևոր կառուցվածքային առանձնահատկությունների բնութագրում;
- ✓ Նոր սահմանափակման (մատրիցի տողերի տարբեր լինելը) և նոր բնութագրերի (շերտային պրոյեկցիաներ ըստ մատրիցի սյուների խմբերի) առկայությամբ դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների մոտավոր լուծման ալգորիթմներ; օպտիմալության ապահովում լոկալ քայլում; արդյունքի երաշխիքի գնահատում;
- ✓ Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ՝ հիմնված աշխատանքում ներմուծված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա:

Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը

Դիտարկված խնդիրները ունեն սկզբունքային տեսական նշանակություն և ուղղակի կապի մեջ են բազմաթիվ կիրառական խնդիրների հետ՝ այն որ գործ ունեն բազմությունների համակարգերի մոդելների, հակադարձ դիսկրետ մաթեմատիկական խնդիրների, սահմանափակումների բավարարման խնդիրների լայն դասերի հետ: Դիտարկված կիրառական հարցերն առնչվել են ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման (ասոցիատիվ կանոնների պեղում), տպագիր տեքստերի ավտոմատ վերծանման (պատկերների դասակարգում ըստ գրաֆիկական բնութագրերի), և ուրիշ խնդիրների հետ (կենսաբժշկություն, ինֆորմացիոն կառավարում ըստ տեքստերի պեղման): Այս աշխատանքները մաս են կազմել մի շարք գիտական նախագծերի, որոնց թվում են՝ INTAS 00-626 “Data Mining Algorithm Incubator”, INTAS 04-77-7173 "Data Flow Systems: Algorithms and Complexity"; c/o PolyBase Inc. USA “Development of Armenian Optical Recognition software system”; EC FP5 IST-12637 "Security Policy Adaptation Reinforced through Agents”; ԿԳՆ ԳՊԿ 11-1b193 “Կոմբինատոր օպտիմիզացիայի նոր, բարդ և չլուծված խնդիրների ալգորիթմական մոտարկման ուսումնասիրում”, 12GE-020 “Մաթեմատիկական համալրում կանաչ ինքնավար ցանցերի կազմակերպմանը”, 13-1B340 “Փակ հասանելի բազմությունների համակարգերի հետազոտում և կիրառում”, 15T-1B417 “Կիրառական ուղղվածության հակադարձման տիպի սահմանափակումների բավարարման խնդիրներ” նախագծերը - ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտի մասնակցությամբ: Հետազոտություններին մասնակից այլ կազմակերպությունների թվում հարկ է նշել՝ ՌԳԱ Հաշվողական Կենտրոնը, Մադրիդի տեխնիկական համալսարանը, Ռոստոկի համալսարանը, Հունգարիայի գիտությունների ակադեմիայի մաթեմատիկայի ինստիտուտը, Պատրասի համալսարանը, և ուրիշներ:

Աշխատանքում ստացված արդյունքների կիրառությունները ամփոփված են հետևյալ սխեմայով.



<u>**Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները**</u>

✓ Հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության ամփոփ նկարագիր բազմարժեք բազմաչափ Ξ_{m+1}^{n} ցանցի ենթաբազմության տեսքով՝ եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով: Մինիմալ կշռով եզրային էլեմենտների դուրսբերում և միակություն (կոորդինատների տեղափոխության ճշտությամբ); մաքսիմալ կշռով էլեմենտների նկարագրում, համարժեքություն հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդրին՝ համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում:

✓ $\bar{r}_{min}$ և r_{max} շեմերի հայտնաբերում այնպես, որ $\bar{r}_{min}$-ից փոքր կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային են, և r_{max}-ից մեծ կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային չեն;

✓ Անհրաժեշտ և բավարար պայման ըստ տրված աստիճանային հաջորդականության պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆի գոյության համար:

✓ Սյուների տրված կշիռներով (ուղղահայաց պրոյեկցիա) և տարբեր տողեր ունեցող (նոր սահմանափակում դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներում) բինար մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցման G արդյունավետ ալգորիթմ; օպտիմալություն լոկալ քայլում; արդյունքի երաշխիքի տեսական գնահատական:

✓ Սյուների որոշակի խմբերի կշիռներով (շերտային պրոյեկցիաներ) և տարբեր տողերով բինար մատրիցի գոյության/կառուցման խնդիրների բարդության հետազոտում, նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներ:

✓ Ξ_{m+1}^{n} ցանցի խորանարդատիպ տրոհում, և նրա հիման վրա՝ Ξ_{m+1}^{n}-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մոտեցում:

✓ Մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման CS ալգորիթմ՝ ներկայացված օպտիմալ բինար վերծանիչների չհատվող բազմությունների տեսքով; ալգորիթմի բարդության գնահատական-բանաձև;

✓ Ստացված արդյունքների կիրառում՝ G ալգորիթմի կիրառումը գումարային բալանսով բինար ծառի մոդել կառուցելու համար պատկերների, ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրում: CS ալգորիթմի կիրառումը քանակական ասոցիատիվ կանոնների (հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության) դուրսբերման համար մոնոտոն ատրիբուտներով տվյալների դեպքում:

Աշխատանքի արդյունքները զեկուցվել են

Աշխատանքում ստացված արդյունքները զեկուցվել են ՀՀ Գիտությունների ազգային ակադեմիայում, ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում, Մադրիդի տեխնիկական համալսարանի ինֆորմատիկայի ֆակուլտետում (2002թ.), Ռոստոկի համալսարանում (2015թ.), մի շարք միջազգային գիտաժողովներում, այդ թվում՝ Computer Science and Information Technologies /CSIT 1997 - CSIT 2017/, Extremal Combinatorics, Cryptography and Coding Theory /2014/ (Հայաստան), Optimal Discrete Structures and Algoritms /ODSA 2006, ODSA 2010/ (Գերմանիա), Natural Information Technologies /NIT 2010/ (Իսպանիա), Mathematics of Distances and Applications /MDA 2012/ (Բուլղարիա), Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications /CSGT 2013/ (Սլովակիա), և Information Technologies /iTech/, Classification, Forecasting, Data Mining /CFDM/, Theoretical Foundations of Informational Modelling /TFIM/ գիտաժողովների շարքում 2003-2017 թթ. (Բուլղարիա):

Հրապարակումներ

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված է 31 գիտական աշխատանք, որոնք թվարկված են սեղմագրի վերջում:

Աշխատանքի կառուցվածքը և ծավալը

Ատենախոսությունը կազմված է առաջաբանից, հինգ գլուխներից, եզրակացությունից, օգտագործված գրականության ցանկից: Ատենախոսութունը շարադրված է 244 էջում, ներառյալ 191 անուն օգտագործված գրականության ցանկը:

Աշխատանքի բովանդակությունը

Առաջաբանը սկսվում է թեմայի արդիականության մեկնաբանմամբ, ներկայացվում են աշխատանքի նպատակն ու խնդիրները, բնութագրվում է հետազոտման առարկան և հետազոտման մեթոդները, նշվում է ստացված արդյունքների նորությունը և նրանց կիրառական նշանակությունը:

Առաջին գլխում բերվում է աշխատանքի հետազոտական տիրույթի վերլուծությունը: Դիտարկվող խնդիրները առաջացել են տարբեր ոլորտներում և մոդելավորվել են տարբեր տերմիններով՝ *բազմությունների համակարգեր*, *դիսկրետ տոմոգրաֆիա*, *բազմաչափ խորանարդ:* Ըստ տիրույթների տրվում է հետազոտությունների արդի վիճակի և ստացված արդյունքների սեղմ նկարագիրը, նշվում են առկա բաց խնդիրները, և բերվում են հավելյալ դիտողություններ՝ աշխատանքում այդ տիրույթների առնչությամբ ստացված արդյունքների համառոտ ներկայացմամբ: Դիտարկվում են նաև հարակից գործիքներ՝ ընդհանուր օգտագործման հաշվարկային մոդելներ, որոնցում կարելի է օգտագործել հետազոտվող խնդիրների շուրջ ստացված արդյունքները: Այս գլուխը պարունակում է նաև աշխատանքում օգտագործվող այլ հասկացություններն ու սահմանումները:

Առաջին գլխի *առաջին բաժնում* ներկայացվում են ուսումնասիրման տիրույթի երեք խումբ խնդիրներ:

- **Բազմությունների համակարգեր /հիպերգրաֆներ/**

Հիպերգրաֆ $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ վերջավոր բազմության վրա՝ դա $E_i\subseteq V$ *ենթաբազմությունների* $H=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$ *ընտանիք* է, այնպես, որ.

(1) $E_i\neq\emptyset, i=1,2,\cdots,m$

(2) $\bigcup_{i=1}^m E_i=V$

Եթե տեղի ունի նաև հետևյալ պայմանը.

(3) $E_i\subseteq E_j \implies i=j$,

ապա $H=\{E_1,E_2,\cdots,E_m\}$ հիպերգրաֆը *պարզ* է:

$v_1,v_2,\cdots,v_n$ էլեմենտները կոչվում են հիպերգրաֆի *գագաթներ*, իսկ $E_1,E_2,\cdots,E_m$ բազմությունները՝ *կողեր*/*հիպերկողեր*:

Հիպերգրաֆը կոչվում է r-*համասեռ*, եթե նրա յուրաքանչյուր կողի հզորությունը r է: *Պարզ գրաֆը* դա 2-*համասեռ* պարզ հիպերգրաֆն է:

Հիպերգրաֆի պարզության ավելի ընդհանուր սահմանում է այն, երբ (3)-ի փոխարեն տեղի ունի հետևյալը. (3′) $E_i=E_j \implies i=j$: Համասեռ հիպերգրաֆի դեպքում այս սահմանումները համընկնում են:

Հիպերգրաֆի v_j գագաթի *աստիճանը*՝ d_j-ն, այդ գագաթը պարունակող կողերի քանակն է: Հիպերգրաֆը s-*ռեգուլյար է*, եթե նրա յուրաքանչյուր գագաթի աստիճանը s է: H հիպերգրաֆի գագաթների աստիճաններից կազմված $d(H)=\{d_1,\cdots,d_n\}$ հաջորդականությունը կոչվում է *հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն*: *Հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության /հիպերգրաֆային հաջորդականությունների/ խնդիրը հետևյալն է՝ գտնել անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի տրված թվերի հաջորդականությունը հանդիսանա պարզ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականություն:*

Գրաֆի դեպքում աստիճանային հաջորդականության խնդրի լուծումը հայտնի է Էրդյոշ-Գալլեյի թեորեմի միջոցով (1969թ.): Հիպերգրաֆի դեպքում՝ աստիճանային հաջորդականության խնդիրը հայտնի բաց խնդիր է, ձևակերպված Կ.Բերժի-ի կողմից 1989թ.: Խնդիրը ակտիվորեն հետազոտվել է բազմաթիվ հեղինակների կողմից՝ Ա.Դյուդնեյ, Չ.Կոլբորն, Դ.Սթինսոն, Վ.Կոկեյ, Դ.Բիլինգտոն, Պ.Լի, Մ.Կորեն, Ն.ԲհանուՄուրթի, Մ.Սրինիվասան, Ռ.ԻնիԼյու, Կ.Կլիվանս, Վ.Ռեյներ, Ս.Բեհրենս, Մ.Ֆեռարա, և ուրիշներ; հայտնի է արդյունքների մի մեծ շարք՝ ներկայացված հասանելի տպագրությունների տեսքով: Սակայն,

- տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության/կառուցման խնդրի բարդության հարցը; ինչպես նաև
- բոլոր աստիճանային հաջորդականությունների բազմության նկարագրման խնդիրը,

մնում են այս տիրույթի մարտահրավերային բաց խնդիրներ, նույնիսկ՝ 3-համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում: Դ.Բիլինգտոնի կողմից գտնվել են 3-համասեռ հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ պայմաններ; կառուցվել է նաև հիպերգրաֆի կառուցման էվրիստիկ (բազմանդամային) ալգորիթմ, որը արդյունավետ է փոքր թվով գագաթների դեպքում (1986-1988թթ.): Վ.Կոկեյի կողմից (2007թ.) սահմանվել են կողերի փոխարինումներ, որոնք ձևափոխում են նույն աստիճանային հաջորդականություններ ունեցող 3-համասեռ հիպերգրաֆները՝ մեկը մյուսին: Ս.Բեհրենս-ը և համահեղինակները ընդհանրացրել են այս արդյունքը k-համասեռ հիպերգրաֆների համար (2013թ.): Մ.Կորենը (1973, 1977թթ.), Ն.ԲհանուՄուրթին և Մ.Սրինիվասանը (2002թ.), Կ.Կլիվանսը և Վ.Ռեյները (2008թ.), Ռ.ԻնիԼյուն (2013թ.) ուսումնասիրել են համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների ուռուցիկ թաղանթը:

Ներկա աշխատանքում աստիճանային հաջորդականությունների խնդիրը դիտարկվում է ընդհանուր դեպքում, երբ հիպերգրաֆի կողերի հզորությունները կամայական են; և երբ հիպերգրաֆը պարզ է՝ կողերը չեն կրկնվում:

- **Դիսկրետ տոմոգրաֆիա**

Տոմոգրաֆիան հակադարձ խնդիրների/մոդելների ենթաբազմություն է առարկայի՝ նրա մասնակի չափումների հիման վրա վերականգնման մասին: Պարզագույն դեպքում *դիսկրետ տոմոգրաֆիան* դիտարկում է առարկաներ, որոնք կազմում են բազմաչափ ամբողջարժեք ցանցի բջիջների վերջավոր T ենթաբազմություն: T-ի *պրոյեկտումը* որևէ ուղղությամբ՝ հաշվում է T-ի տարրերի քանակը պրոյեկտման ուղղությանը զուգահեռ ուղիղների վրա: Տրված են վերջավոր թվով պրոյեկցիաներ, պահանջվում է այդ մասնակի ինֆորմացիայի հիման վրա վերականգնել T-ն, կամ՝ կառուցել այդ պրոյեկցիաներն ունեցող որևէ բազմություն: 2 չափանի ցանցի դեպքում T-ն կարող է ներկայացվել որպես բինար մատրից; տրված օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով բինար մատրիցի գոյության և կառուցման խնդիրները լուծվել են Դ.Գեյլի և Հ.Ռայզերի կողմից կոմբինատոր տերմիններով դեռևս 1957 թ.[3]:

[3] Gale D., A theorem on flows in networks, Pacific J. Math., 7 (1957), pp. 1073–1082; Ryser H.J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones, Canad. J. Math. 9 (1957) 371–377.

Մատրիցային մոդելի անցման արդյունքում պրոյեկցիաների տրված վերջավոր բազմության համար կարող են գոյություն ունենալ ինչպես կրկնվող տողերով մատրիցներ, այնպես էլ՝ մեծ թվով համապատասխանող մատրիցներ: Առաջինը խախտում է T-ի ենթաբազմություն լինելու պահանջը, երկրորդը խնդրի միակ լուծման փոխարեն առաջարկում է մոտարկումների լայն դաս: Փոքր թվով պրոյեկցիաների դեպքում մեծ թվով լուծումների փաստը ուսումնասիրված է (Ռ.Գարդներ, Պ.Գրիթզման, 1997թ.): Հայտնի է նաև, որ տրված հորիզոնական և ուղղահայաց պրոյեկցիաների դեպքում լուծումների քանակը կարող է դառնալ էքսպոնենցիալ (Ա.ԴելԼունգո, 1994թ.): Մյուս կողմից, պրոյեկցիաների կամայական բազմության համար, որը պարունակում է առնվազն երեք տարբեր ուղղություններով պրոյեկցիաներ, — խնդիրը NP-լրիվ է (Ռ.Գարդներ, Պ.Գրիթզման, 1999թ.): Ընդհանրապես, կապված կիրառական խնդիրների հետ, վերականգնվող առարկայի մասին ենթադրվում է, որ առկա է որևէ նախնական հատկություն, և այն կարող է ուղղվել հնարավոր լուծումների դասի նեղացմանը: Հաճախ կիրառվող երկրաչափական հատկություններից են ուռուցիկությունը և կապակցվածությունը: Ե.Բարկուչին, Ա.ԴելԼունգոն, Մ.Նիվան և Ռ.Պինզանին ցույց են տվել (1996), որ տրված օրթոգոնալ պրոյեկցիաներով մատրիցի գոյության խնդիրը NP-լրիվ է հորիզոնական/ուղղահայաց ուռուցիկ, ինչպես նաև հորիզոնական/ուղղահայաց ուռուցիկ և կապակցված մատրիցների դեպքերում: Նրանք առաջարկել են նաև բազմանդամային ալգորիթմ հորիզոնական և ուղղահայաց ուռուցիկ և կապակցված մատրիցների համար: Մի շարք այլ դեպքերի NP-լրիվությունը ապացուցվել է Գ.Վոեջինջերի կողմից (2001): Այսպիսով, դիսկրետ տոմոգրաֆիայի տիրույթում մատրիցային մոդելների անցման դեպքում անբավարար ուսումնասիրված է մնում մատրիցի տողերի չկրկնման հիմնարար պահանջը, ինչն այս աշխատանքի հիմնական թիրախներից մեկն է: Մյուս կողմից, առկա են կիրառական խնդիրների կողմից տրամադրած և այլ ֆորմալ սահմանափակումներ, որոնք լայն հետազոտական ռեսուրս են պարզելու համար, թե որ սահմանափակումների առկայությունը /բացակայությունն է խնդիրը դարձնում հեշտ լուծելի, և ընդհանրապես, որոնք են խնդիրների լուծման ալգորիթմները ըստ սահմանափակումների:

- **Բազմաչափ խորանարդ**

n-չափանի միավոր խորանարդի գագաթների E^n բազմությունը իրենից ներկայացնում է $E=\{0,1\}$ բազմության n-րդ դեկարտյան աստիճանը.

$$E^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n), x_i \in E, i = 1, \cdots, n\}:$$

Կամայական գագաթը ստացվում է $x_1, x_2, \cdots, x_n$ բինար փոփոխականներին արժեքների վերագրումով: Կամայական x_i-ի համար դիտարկենք E^n-ի տրոհումը ըստ x_i փոփոխականի արժեքի.

$$E^{n-1}_{x_i=0} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 0\} \text{ և } E^{n-1}_{x_i=1} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n | x_i = 1\}:$$

Յուրաքանչյուր $A \subseteq E^n$ բազմություն կտրոհվի $A_{x_i=1} \subseteq E^{n-1}_{x_i=1}$ և $A_{x_i=0} \subseteq E^{n-1}_{x_i=0}$ ենթաբազմությունների:

E^n-ում r շառավղով $\tilde{\alpha}$ կենտրոնով $S_r(\tilde{\alpha})$ գունդը՝ E^n-ի այն գագաթների բազմությունն է, որոնք ունեն $\leq r$ հեմինգյան հեռավորութուն $\tilde{\alpha}$ -ից: $A \subseteq E^n$ բազմության $\tilde{\alpha}$ գագաթը կանվանենք *ներքին*, եթե $S_1(\tilde{\alpha}) \subseteq A$, հակառակ դեպքում՝ գագաթը կանվանենք *եզրային*: $I(A)$-ով և $B(A)$-ով նշանակենք A-ի ներքին և եզրային գագաթների բազմությունները: *Դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրում* պահանջվում է տրված m թվի համար, $0 \le m \le 2^n$, գտնել m հզորությամբ այնպիսի $A \subseteq E^n$ բազմություն, որ $B(A) = \min_{M \subseteq E^n, |M|=m} B(M)$: Խնդրի հետ կապված առաջին ուսումնասիրությունները կատարվել են Լ.Հարպերի և Ռ.Նիգմատուլլինի աշխատանքներում: Լ.Հարպերը, օգտագործելով «տեղաշարժ» գործողությունը, ստացել է իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծում՝ կառուցելով աճեցվող լուծումներ բառարանային հաջորդականության սկզբնահատվածների տեսքով: Հայտնի են Ռ.Նիգմատուլլինի երեք իզոպերիմետրիկ անհավասարությունները.

I. Կամայական $A \subseteq E^n$-ի և $i \in \overline{1,n}$-ի համար $B\,(A) \supseteq B\,(A_{x_{i=0}}) \cup B\,(A_{x_{i=1}})$:

II. Եթե $A \subseteq E^n$-ն բերված տեսքի է, ապա $|B\,(A)| \ge \left|B\left(A_{x_{i=0}}\right)\right| + \left|A_{x_{i=1}}\right| - \left|A_{x_{i=0}}\right|$ (A-ն կոչվում է բերված տեսքի, եթե $\left|A_{x_{i=1}}\right| \ge |A|/2,\ i = 1, \cdots, n$):

III. Եթե $A \subseteq E^n$, $|A| = m = \sum_{t=0}^{k} C_n^t + \delta,\ 0 \le k \le n$ և $0 \le \delta < C_n^{k+1}$ ապա $\exists i \in \overline{1,n}$ այնպես որ $\left|A_{x_{i=1}}\right| \ge \sum_{t=0}^{k-1} C_{n-1}^t + \delta\frac{k+1}{n}$:

Լ.Ասլանյանը, օգտագործելով Ռ.Նիգմատուլլինի III անհավասարությունը, տվել է դիսկրետ իզոպերիմետրիկ խնդրի լուծումների բազմության նկարագիրը: E^n-ի ենթաբազմությունների *տրոհումների հզորությունների նկարագրման խնդիրը* պայմանավորված է այն բանով, որ այն նպաստում է խնդրի լուծումների բազմության նկարագրմանը:

Բազմաչափ խորանարդի մոդելում դիտարկվող հաջորդ խնդիրը կապված է մոնոտոն բինար ֆունկցիաների ճանաչման հետ: f Բուլյան ֆունկցիան կոչվում է *մոնոտոն*, եթե $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$-ից հետևում է, որ $f\,(\tilde{\alpha}) \le f\,(\tilde{\beta})$, կամայական $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^n$ համար: Կամայական Բուլյան ֆունկցիա երկրաչափորեն կարելի է պատկերել E^n-ում՝ նրան համապատասխանեցնելով E^n-ի բոլոր այն գագաթների բազմությունը, որոնց վրա ֆունկցիան ընդունում է 1 արժեք:

Մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի *ճանաչումը/վերծանումը* ալգորիթմական խնդիր է, որը E^n-ի գագաթների ընտրության և նրանցում ֆունկցիայի արժեքի *հարցման* ճանապահով վերծանում է ֆունկցիան, օգտագործելով և տարածելով ֆունկցիայի մոնոտոնության հատկությունը: Դիցուք՝ A-ն E^n-ում որոշված մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման որևէ ալգորիթմ է: $\phi_A(n)$-ով նշանակենք հարցումների մինիմալ քանակը, որը բավարար է n փոփոխականի կամայական ֆունկցիայի A ալգորիթմի միջոցով ճանաչման համար: $\phi(n) = \min\phi_A(n)$, որտեղ մինիմումը ըստ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի ճանաչման բոլոր ալգորիթմների է: $\phi(n)$-ի համար մի շարք ստորին և վերին գնահատականներ գտնվել են Վ.Կորոբկովի կողմից 1965թ.-ին, այնուհետև ընդհանուր լուծումը գտնվել է Գ.Հանսելի կողմից 1966թ. E^n-ը հատուկ շղթաների տրոհման միջոցով՝ $\phi(n) = C_n^{\lfloor n/2 \rfloor} + C_n^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$: Բազմարժեք բազմաչափ ցանցի դեպքում *մոնոտոն բինար ֆունկցիայի* վերծանման խնդիրը դիտարկվել է Վ.Ալեքսեևի կողմից, որն առաջարկել է ալգորիթմ՝ կառուցելով Գ.Հանսելի շղթաների անալոգը: Ալգորիթմի բարդության գնահատականները տրված են ցանցի միջին շերտերի կետերի քանակի միջոցով, բայց դրանք բանաձևային չեն: Ամփոփելով, որպես այս մասով աշխատանքի առաջնային թիրախներ հարկ է նշել խորանարդի ենթաբազմությունների տրոհման քանակական նկարագրման խնդիրը, ինչպես նաև մոնոտոն ֆունկցիայի վերծանման օպտիմալ ալգորիթմների կառուցման խնդիրը, ինչն իր հերթին առաջնային է քանակական ասոցիատիվ կանոնների պեղման ալգորիթմների կառուցման համար: Առաջինը բաց խնդիր է, որը համարժեք է հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդրին, երկրորդը՝ դասական մոդելավորման խնդիր է, որը աշխատանքում ստանում է նոր լուծում օգտագործելով ստեղծված խորանարդատիպ տրոհման գաղափարը:

Առաջին գլխի *երկրորդ բաժնում* ներկայացվում են, այսպես կոչված, հարակից գործիքները՝ հաշվարկային մոդելներ, որոնցում կարելի է ներկայացնել դիտարկվող հետազոտական առարկան: Դրանցից մեկը սահմանափակումների բավարարման խնդիրն է /Constraint Satisfaction Problems/, որը, ընդհանուր առմամբ, միավորող մաթեմատիկական մոդել է, որտեղ բնական ճանապարհով ներկայացվում են բազմազան հաշվողական խնդիրներ: Մյուս մոդելը՝ գծային ծրագրավորման մոդելն է: Այս բաժնում է ներկայացվում նաև տվյալների պեղման հիմնական մեթոդներից մեկը՝ ասոցիատիվ կանոնների պեղման մոդելը:

Առաջին ներածական գլխի վերջին *երրորդ բաժնում* ներկայացվում են աշխատանքում օգտագործված այլ հիմնական հասկացություններ և սահմանումներ:

Երկրորդ գլխում դիտարկվում է n-չափանի միավոր E^n խորանարդի գագաթների m-ենթաբազմությունների տրոհումների ասոցացված վեկտորների $D^m(n)$ բազմության նկարագրման խնդիրը՝ որպես սահմանափակումների բավարարման մի խումբ համարժեք խնդիրների ներկայացուցիչ, որոնց թվում է հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիրը ([7], [8], [13], [22], [24], [27]): Բազմարժեք բազմաչափ Ξ_{m+1}^n ցանցում, որը $D^m(n)$-ը պարունակող մինիմալ տիրույթն է, տրվում է $D^m(n)$-ի նկարագիրը եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով: Ցույց է տրվում, որ եզրային էլեմենտներն էլ իրենց հերթին կառուցվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների օգնությամբ: $D^m(n)$-ի ուսումնասիրումը բացահայտում է նրա մինիմալ և մաքսիմալ կշռով տարրերը: Ապացուցվում է, որ մինիմալ կշռով տարրերը համապատասխանում են E^n-ի բառարանային սեղմված m-ենթաբազմությանը, և որ նրանք որպես այդպիսին՝ միակն են կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ: Ցույց է տրվում, որ մաքսիմալ կշռով տարրերը համապատասխանում են E^n-ի $\tilde{1}$ կենտրոնով գնդաձև m-ենթաբազմություններին: Դուրս է բերվում տրված աստիճանային հաջորդականությամբ պարզ հիպերգրաֆի գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման ռեգուլյար հիպերգրաֆների դասի համար:

Երկրորդ գլխի *առաջին բաժինը* նվիրված է $D^m(n)$ տիրույթի նկարագրմանը:

Սահմանում 2.1-1: $d = (d_1, \cdots, d_n)$ ամբողջարժեք վեկտորը կոչվում է $\mathcal{E} \subseteq E^n$ բազմության *տրոհումների ասոցացված վեկտոր*, եթե $d_i = |\mathcal{E}_{x_i=1}|$, $i = 1, \cdots, n$:

Գոյության խնդիր - տրված է n-չափանի d ամբողջարժեք վեկտոր; պարզել գոյություն ունի արդյոք E^n-ի ենթաբազմություն, որի համար d –ն հանդիսանում է տրոհումների ասոցացված վեկտոր;

Նկարագրման խնդիր – տալ E^n-ի բոլոր ենթաբազմությունների տրոհումներից ստացված ասոցացված վեկտորների բազմության պարզ նկարագիրը:

Նշված խնդիրները դիտարկվում են E^n-ի ֆիքսված m հզորության ենթաբազմությունների համար: Պարզ է, որ բավարար է սահմանափակվել $0 \leq m \leq 2^n$ արժեքների դիտարկմամբ:
$H_m(n)$-ով նշանակենք E^n-ի m հզորության բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը, կամ որ նույնն է, բոլոր պարզ /չկրկնվող կողերով/ հիպերգրաֆների բազմությունը, որոնց գագաթների բազմությունը $[n] = \{1,2,\cdots,n\}$-ն է, իսկ կողերի քանակը m է: $D_m(n)$-ը $H_m(n)$-ի էլեմենտների աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունն է:
Եթե դիտարկվող հիպերգրաֆներում պարզության սահմանափակումը չլիներ, ապա համապատասխան աստիճանային հաջորդականությունների բազմությունը կհամընկներ Ξ_{m+1}^n-ի՝ այսինքն n չափանի m արժեքանի ամբողջարժեք ցանցի, գագաթների բազմության հետ. $\Xi_{m+1}^n=\{(a_1,\cdots,a_n)|0 \leq a_i \leq m, i = 1,\cdots,n \}$: Ξ_{m+1}^n-ում սահմանվում է կոորդինատ-առ-կոորդինատ համեմատման մասնակի կարգ՝ $(a_1,\cdots,a_n) \leq (b_1,\cdots,b_n)$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $a_i \leq b_i$, $i = 1,\cdots,n$: Ξ_{m+1}^n-ի գագաթի կշիռը/ռանգը սահմանվում է որպես նրա կոմպոնենտների գումար՝ $r(a_1,\cdots,a_n) = a_1 + \cdots + a_n$:

$D_m(n) \subseteq \Xi_{m+1}^n$, և առաջիկա նպատակը՝ $D_m(n)$-ի կառուցվածքի նկարագրումն է Ξ_{m+1}^n-ում:

Սահմանում 2.1.1-2: $d \in \Xi_{m+1}^n$ -ն կանվանենք Ξ_{m+1}^n-ի *վերին էլեմենտ*, եթե նրա կոմպոնենտների արժեքները առնվազն $m/2$ են; և կանվանենք Ξ_{m+1}^n-ի *ստորին էլեմենտ*, եթե կոմպոնենտների արժեքները ամենաշատը $m/2$ են:

$\hat{H}$–ով և $\check{H}$–ով նշանակենք Ξ_{m+1}^n-ի վերին և ստորին էլեմենտների բազմությունը:

Սահմանում 2.1.1-3: $d, \bar{d} \in \Xi_{m+1}^n$ էլեմենտները /զույգը/ կանվանենք *հակադիր էլեմենտներ /հակադիր էլեմենտների զույգ/* Ξ_{m+1}^n-ում, եթե մեկը մյուսից ստացվում է m –ի նկատմամբ կոմպոնենտների արժեքների շրջումով, այսինքն, եթե $d = (d_1,\cdots,d_n)$, ապա՝ $\bar{d} = (m - d_1,\cdots,m - d_n)$:

Սահմանում 2.1.3-1: $d \in D_m(n)$ էլեմենտը կոչվում է $D_m(n)$-ի *վերին եզրային* էլեմենտ, եթե Ξ_{m+1}^n-ի կամայական էլեմենտ, որը մեծ է d–ից, չի պատկանում $D_m(n)$-ին; և կոչվում է $D_m(n)$-ի *ստորին եզրային* էլեմենտ, եթե Ξ_{m+1}^n-ի կամայական էլեմենտ, որը փոքր է d–ից, չի պատկանում $D_m(n)$-ին:

$\hat{D}_{max}$-ով և $\check{D}_{min}$-ով նշանակենք $D_m(n)$-ի վերին և ստորին եզրային էլեմենտների բազմությունը:

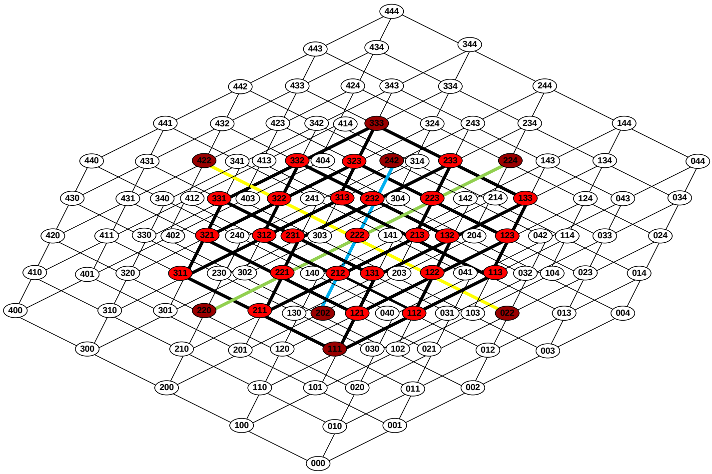
Հատկություն 2.1.3-1: $\hat{D}_{max}$-ի և $\check{D}_{min}$-ի էլեմենտները հանդես են գալիս զույգերով՝ յուրաքանչյուր $\hat{d} \in \hat{D}_{max}$ էլեմենտի համար գոյություն ունի նրան հակադիր $\bar{\hat{d}} \in \check{D}_{min}$ էլեմենտը, և հակառակը, այստեղից՝ $|\hat{D}_{max}| = |\check{D}_{min}|$:

Հատկություն 2.1.3-2: $\hat{D}_{max} \subseteq \hat{H}$ և $\check{D}_{min} \subseteq \check{H}$:

Հատկություն 2.1.3-3: $\hat{D}_{max}$-ը և $\check{D}_{min}$-ը հակաշղթաներ են Ξ_{m+1}^n-ում:

$E(d', d'')$-ով նշանակենք Ξ_{m+1}^n-ի գագաթների (d', d''), $d' \leq d''$ զույգով անցնող մինիմալ ենթացանցը Ξ_{m+1}^n-ում՝ $E(d', d'') = \{a \in \Xi_{m+1}^n | d' \leq a \leq d''\}$:

Թեորեմ 2.1.4-1-ը պնդում է, որ եթե դիտարկենք այն մինիմալ ենթացանցերը, որոնք անցնում են վերին և ստորին եզրային էլեմենտներից բաղկացած հակադիր էլեմենտների զույգով, ապա այդ բոլոր ենթացանցերի միավորումը կազմում է $D_m(n)$-ը:



Նկար 2.1.4-1: $D_4(3)$ բազմությունը Ξ_5^3-ում:

Թեորեմ 2.1.4-1: $D_m(n) = \bigcup_{\substack{\check{d}\in\check{D}_{min} \\ \hat{d}\in\hat{D}_{max} \\ \check{d}=\bar{\hat{d}}}} E(\check{d},\hat{d})$:

Այսպիսով, $\widehat{D}_{max}$-ը /$\widecheck{D}_{min}$-ը/ $D_m(n)$-ի համար հանդիսանում է գեներացնող բազմություն: Նկար 2.1.4-1-ում բերվում է երկրաչափական մեկնաբանումը Ξ_5^3-ի օրինակի վրա: $D_4(3)$ տիրույթը՝ $E((111),(333))$, $E((022),(422))$, $E((202),(242))$, $E((220),(224))$ ենթացանցերի միավորումն է:

Թեորեմ 2.1.4-2: $D_m(n)$-ը ուռուցիկ բազմություն չէ, երբ $1 < m < 2^n - 1$:

Հաջորդ պնդումով ցույց է տրվում, որ $\widehat{D}_{max}$-ի և $\widecheck{D}_{min}$-ի էլեմենտները կառուցվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների միջոցով: M_m^1-ով նշանակենք E^n-ի այն m-ենթաբազմությունների դասը, որոնք համապատասխանում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաներին /նրանց 1 արժեքի գագաթների բազմությանը/, և $D_m^{M_m^1}(n)$-ով նշանակենք M_m^1-ի բազմությունների ասոցացված վեկտորների դասը: M_m^0-ով նշանակենք E^n-ի այն m-ենթաբազմությունների դասը, որոնք համապատասխանում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաներին /0 արժեքի գագաթների բազմությանը/, և $D_m^{M_m^0}(n)$-ով նշանակենք M_m^0-ի բազմությունների ասոցացված վեկտորների դասը:

Թեորեմ 2.1.6-1: $\widehat{D}_{max} \subseteq D_m^{M_m^1}(n)$ և $\widecheck{D}_{min} \subseteq D_m^{M_m^0}(n)$:

Երկրորդ գլխի *երկրորդ բաժնում* ուսումնասիրվում է $D^m(n)$ տիրույթի կառուցվածքը՝ տրվում են վերին եզրային էլեմենտների բնութագրական դասեր:

E^n-ի էլեմենտները համարակալենք ըստ նրանց ունեցած երկուական արժեքի՝ 2^n-1-ից 0: Այս համարակալումը համընկնում է n երկարության բինար բառերի *հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի* հետ: E^n-ի էլեմենտների հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի առաջին k էլեմենտները (որևէ k-ի համար) կանվանենք k-սկզբնահատված: k-սկզբնահատվածը հանդիսանում է E^n-ում որոշված և k հատ 1 արժեք ունեցող որևէ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմություն; այն իրենից ներկայացնում է $k_1,k_2,\cdots,k_p$ չափանի ինտերվալների միավորում, որտեղ $k_1,k_2,\cdots,k_p$-ն m թվի երկուական ներկայացման մեջ 1 արժեքով կոմպոնենտների համարներն են՝
$m=2^{k_1}+2^{k_2}+\cdots+2^{k_p}$, $k_1>k_2>\cdots>k_p\geq 0$:

Եթե հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգը կիրառենք ըստ $(x_1,\cdots,x_n)$-ի բոլոր $(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$-տեղափոխությունների, ապա k-սկզբնահատվածներից կառաջանան իզոմորֆ մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների դասեր: Այս ֆունկցիաների 1 արժեքների բազմությունը E^n-ում ունի "սեղմված" բազմության տեսք: Հակադարձ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի սկզբնահատվածները կանվանենք նաև "*սեղմված" բազմություններ*:

H_{rmin}-ով նշանակենք E^n-ի m հզորության "սեղմված" բազմությունների դասը: Այսպիսով, H_{rmin}-ը իզոմորֆ հիպերգրաֆների դաս է, որոնց աստիճանային հաջորդականությունները նույն ռանգն ունեն (նշանակենք այն r_{min}-ով), և մեկը մյուսից ստացվում են կոորդինատների տեղափոխությունների միջոցով: Համապատասխան աստիճանային հաջորդականությունների դասը նշանակենք $d(H_{rmin})$-ով:

Հետևյալ Թեորեմ 2.2.1-1-ի, Թեորեմ 2.2.1-2-ի և Թեորեմ 2.2.2-1-ի արդյունքում ստանում ենք, որ H_{rmin}-ի հիպերգրաֆները, և միայն նրանք ունեն մինիմալ ռանգով վերին եզրային աստիճանային հաջորդականություններ:

Թեորեմ 2.2.1-1: $d(H_{rmin})\subseteq\widehat{D}_{max}$:

Թեորեմ 2.2.1-2: $r_{min}=\min\limits_{d\in\widehat{D}_{max}} r(d)$:

Թեորեմ 2.2.2-1: Բոլոր այն հիպերգրաֆները, որոնց աստիճանային հաջորդականությունները $\widehat{D}_{max}$-ից են և ունեն մինիմալ ռանգ, պատկանում են H_{rmin}-ին:

H_{rmin}-ի բազմությունների կառուցվածքի միջոցով հաշվվում է մինիմալ r_{min} ռանգը. $r_{min}=\sum_{i=1}^{n} d_i=\sum_{i=1}^{p}((n-k_i-(i-1))\cdot 2^{k_i}+k_i\cdot 2^{k_i-1})$:

Դիցուք՝ $H\in H_{rmin}$, և $d_{min}=d(H)=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$: d_{min} աստիճանային հաջորդականության կոմպոնենտները հաշվվում են ըստ հետևյալի (ինդեքսների պարզեցման համար ենթադրում ենք, որ լեքսիկոգրաֆիկ կարգը կիրառված է ըստ $(x_n,\cdots,x_1)$-ի).

$$d_i=\begin{cases}\left(\sum_{l=1}^{j-1}2^{k_l-1}\right)+2^{k_j},\ i=k_j+1, j=1,\cdots,p\\ \left(\sum_{l=1}^{j}2^{k_l-1}\right)+\sum_{l=j+1}^{p}2^{k_l},\ k_{j+1}+2\leq i\leq k_j, j=1,\cdots,p-1\\ \left(\sum_{l=1}^{p}2^{k_l-1}\right)=\frac{m}{2},\ 1\leq i\leq k_p\\ \left(\sum_{l=1}^{p}2^{k_l}\right)=m,\ k_1+2\leq i\leq n\end{cases}$$

Այժմ անդրադառնանք մաքսիմալ ռանգին առնչվող արդյունքներին: Դիտարկենք m թվի հետևյալ կանոնական ներկայացումը՝

$m = C_n^n + C_n^{n-1} + \cdots + C_n^{n-k} + \delta,\ \delta < C_n^{n-k-1}$ (2.2.4-1)

H_{rmax}-ով նշանակենք մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների /հիպերգրաֆների/ հետևյալ դասը՝ որպես ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմություն վերցնում ենք E^n-ի n-րդ, $(n-1)$-րդ, և այլն, $(n-k)$-րդ շերտերի բոլոր գագաթները և δ հատ գագաթ $(n-k-1)$-րդ շերտից: H_{rmax} դասի բազմությունները մեկը մյուսից տարբերվում են δ գագաթների ընտրությամբ: Պարզ է, որ այս ձևով կառուցված բազմության տրոհումների ասոցացված վեկտորը ունի առավելագույն r_{max} ռանգ, և $r_{max} = \sum_{i=0}^{k}(n-i)\cdot C_n^{n-i} + (n-k-1)\cdot\delta$:

Թեորեմ 2.2.4-1: H_{rmax} դասի հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդիրը համարժեք է պարզ համասեռ հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականությունների նկարագրման խնդրին:

Երկրորդ գլխի *երրորդ բաժնում* դիտարկվում է հիպերգրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդրի մի մասնավոր դեպք՝ խնդիրը պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆների համար, և դուրս է բերվում գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման:

Թեորեմ 2.3-2: Դիցուք՝ $S = (s, \cdots, s)$-ը n չափանի ամբողջարժեք վեկտոր է, և $m \le 2^n$-ը ամբողջ թիվ է: Գոյություն ունի n գագաթներով և m հիպերկողերով պարզ s-ռեգուլյար հիպերգրաֆ այն և միայն այն դեպքում, երբ
$m - (\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lfloor\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rfloor) \le s \le (\sum_{j=0}^{k} C_{n-1}^{n-j-1} + \left\lceil\frac{(n-k-1)\cdot\delta}{n}\right\rceil)$, որտեղ k-ն և δ-ն m թվի կանոնական ներկայացումից են:

Երրորդ գլխում դուրս են բերվում $D^m(n)$-ի կառուցվածքային նկարագրին առնչվող հարակից արդյունքներ ([9], [11], [14], [21], [25], [26]):

Երրորդ գլխի *առաջին բաժնում* բերվում է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների բազմության կառուցվածքը Ξ_{m+1}^n-ի վերին և ստորին տիրույթներում:

Սահմանում 3.1-1: $d \in D_m(n)$ հաջորդականությունը կանվանենք *վերին հիպերգրաֆային,* եթե $d \in \widehat{H}$, և կանվանենք *ստորին հիպերգրաֆային*, եթե $d \in \breve{H}$:

$\widehat{D}_m(n)$-ով և $\breve{D}_m(n)$-ով նշանակենք $D_m(n)$-ի վերին և ստորին հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասերը՝ $\widehat{D}_m(n) = D_m(n) \cap \widehat{H}$; $\breve{D}_m(n) = D_m(n) \cap \breve{H}$: Հետևյալ պնդումով տրվում է համապատասխան կառուցվածքը.

Թեորեմ 3.1-1: $\widehat{D}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\widehat{H}$ -ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 0 արժեքների բազմությանը, որի վերին 0-ների բազմությունը $\widehat{D}_{max}$-ն է: $\breve{D}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\breve{H}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմությանը, որի ստորին 1-երի բազմությունը $\breve{D}_{min}$-ն է:

Երրորդ գլխի *երկրորդ բաժնում* ներմուծվում է Ξ_{m+1}^n-ի խորանարդատիպ տրոհումը, որի արդյունքում՝ $D_m(n)$-ը գտնելու համար բավական է ունենալ նրա նկարագիրը $\widehat{H}$ /կամ $\breve{H}$/ տիրույթում:

Սահմանում 3.2-1: Ξ_{m+1}^n-ի $a = (a_1, \cdots, a_n)$ և $b = (b_1, \cdots, b_n)$ գագաթները կանվանենք *ուղղահայաց համարժեք,* եթե $a_i \in \{b_i, m - b_i\}$ բոլոր i-երի համար, $1 \leq i \leq n$:

$V(a)$-ով նշանակենք a գագաթի *ուղղահայաց համարժեքության դասը*՝ այսինքն այն բոլոր գագաթների դասը, որոնք ուղղահայաց համարժեք են a գագաթին: Ուղղահայաց համարժեքության դասերի միջոցով Ξ_{m+1}^n-ը տրոհվում է $|\widehat{H}|$ քանակով՝ բինար խորանարդին նույնանման կառուցվածքների: Այսպիսի տրոհումը անվանում ենք Ξ_{m+1}^n-ի *խորանարդատիպ տրոհում*:

Թեորեմ 3.2-1: $D_m(n) = \bigcup_{d \in \widehat{D}_m(n)} V(d) = \bigcup_{d \in \breve{D}_m(n)} V(d)$:

Երրորդ գլխի *երրորդ բաժնում* սահմանվում է “*ամենաանհարթ հաջորդականության” գաղափարը* $D_m(n)$-ում, այնուհետև ցույց է տրվում, որ $D_m(n)$-ի համար գեներացնող բազմություն է հանդիսանում ամենաանհարթ և վերին եզրային բազմությունների հատումը:

Թեորեմ 3.3-2: Եթե $d \in \widehat{D}_{max}$, ապա $D_m(n)$-ին պատկանող d-ից անհարթ բոլոր d' հաջորդականությունները նույնպես պատկանում են $\widehat{D}_{max}$-ին:

Արդյունքում ստացվում է, որ $D_m(n)$-ի համար գեներացնող բազմություն է հանդիսանում $\widehat{D}_{max}$-ի ամենաանհարթ հաջորդականությունների բազմությունը:

Այս բաժնում դիտարկվում է նաև $\widehat{D}_{max}$-ի ամենաանհարթ հաջորդականությունների դասեր գտնելու խնդիրը:

Դիտարկենք m դրական ամբողջ թվի որևէ ամբողջարժեք տրոհում՝ $m = m_1 + m_2$, այնպես, որ. $2^{n-1} \geq m_1 \geq m_2$: Տրոհենք E^n-ը ըստ որևէ փոփոխականի արժեքի՝ դիցուք դա x_1-ն է: Դիտարկենք m_1 և m_2 հզորություններով սեղմված բազմությունները $E_{x_1=1}^{n-1}$-ում և $E_{x_1=0}^{n-1}$-ում (նշանակենք համապատասխանաբար, $R_{m_1}(n-1)$-ով և $R_{m_2}(n-1)$ –ով): Թեորեմ 3.3.1-1-ը պնդում է, որ եթե դիտարկենք այդ բազմությունների միավորումը E^n-ում, ապա նրա տրոհումների ասոցացված վեկտորը կլինի վերին եզրային; և Թեորեմ 3.3.1-2-ը պնդում է, որ այդ վեկտորը նաև ամենաանհարթ հաջորդականություն է:

Թեորեմ 3.3.1-1: Դիցուք՝ $(d_2', \cdots, d_n')$-ը և $(d_2'', \cdots, d_n'')$-ը, համապատասխանաբար, հանդիսանում են $R_{m_1}(n-1)$ և $R_{m_2}(n-1)$ բազմությունների ասոցացված վեկտորները, և դիցուք՝ $\mathcal{E}$-ը այդ բազմությունների միավորումն է E^n-ում: Այդ դեպքում $\mathcal{E}$-ի տրոհումների ասոցացված վեկտորը հանդիսանում է վերին եզրային հաջորդականություն:

Թեորեմ 3.3.1-2: Դիցուք՝ $(d_2', \cdots, d_n')$-ը և $(d_2'', \cdots, d_n'')$-ը հանդիսանում են $R_{m_1}(n-1)$-ի և $R_{m_2}(n-1)$-ի ասոցացված վեկտորները, և դիցուք՝ $\mathcal{E}$-ը այդ բազմությունների միավորումն է E^n-ում: Այդ դեպքում $\mathcal{E}$-ի տրոհումների ասոցացված վեկտորը հանդիսանում է ամենաանհարթ հաջորդականություն:

Թեորեմ 3.3.1-1-ի և Թեորեմ 3.3.1-2-ի կիրառումը բոլոր թույլատրելի (m_1, m_2) զույգերի համար, հանգեցնում է հետևյալ կարևոր արդյունքին.

Թեորեմ 3.3.1-3: Կամայական s-ի համար, որը գտնվում է $\left]\frac{m}{2}\right[\leq s \leq m$ միջակայքում, գոյություն ունի վերին ամենաանհարթ հաջորդականություն, որն ունի s արժեքով կոմպոնենտ:

Երրորդ գլխի *չորրորդ բաժնում* դիտարկվում է $\Xi_{m+1}^{n} \backslash D_m(n)$ բազմությունը՝ $D_m(n)$-ի լրացումը Ξ_{m+1}^{n}-ում: Լրացման դիտարկմամբ հնարավոր է դառնում գտնել մինիմալ շեմ, այնպես որ $\widehat{H}$-ի բոլոր այն էլեմենտները, որոնց ռանգը փոքր է մինիմալ շեմից՝ հիպերգրաֆային են:

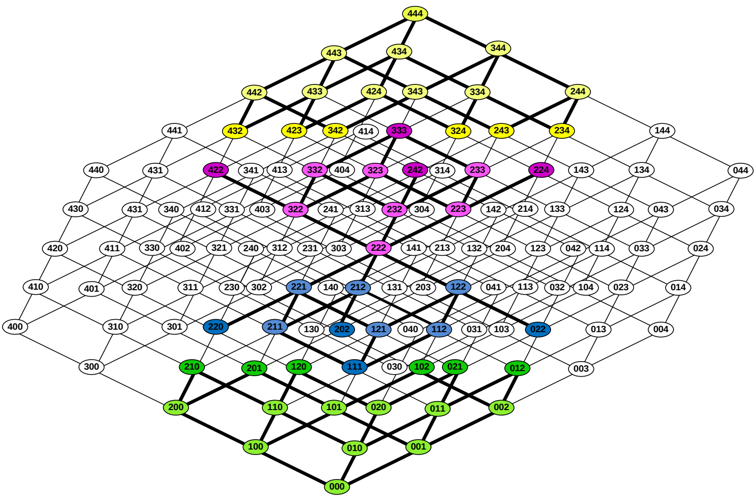
Սահմանում 3.4-1: $d \in \Xi_{m+1}^{n} \backslash D_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք Ξ_{m+1}^{n}-ում *վերին ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականություն,* եթե $d \in \widehat{H}$; և կանվանենք *ստորին ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականություն,* եթե $d \in \breve{H}$:

$\widehat{F}_m(n)$-ով և $\breve{F}_m(n)$-ով նշանակենք *վերին և ստորին ոչ հիպերգրաֆային* հաջորդականությունների բազմությունները՝ $\widehat{F}_m(n) = \widehat{H} \backslash \widehat{D}_m(n)$, $\breve{F}_m(n) = \breve{H} \backslash \breve{D}_m(n)$:

$\widehat{F}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\widehat{H}$ –ում որոշված որոշակի մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 1 արժեքների բազմության, և $\breve{F}_m(n)$-ը համապատասխանում է $\breve{H}$ –ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի 0 արժեքների բազմության:

Սահմանում 3.4-2: $\hat{d} \in \widehat{F}_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $\widehat{F}_m(n)$-ի *ստորին եզրային էլեմենտ*, եթե $\hat{d}$ -ից փոքր բոլոր $a \in \widehat{H}$ էլեմենտները պատկանում են $D_m(n)$-ին: $\check{d} \in \breve{F}_m(n)$ էլեմենտը կանվանենք $\breve{F}_m(n)$ -ի *վերին եզրային էլեմենտ*, եթե $\check{d}$ -ից մեծ բոլոր $a \in \breve{H}$ էլեմենտները պատկանում են $D_m(n)$-ին:

$\widehat{\widehat{D}}_{max}$-ով և $\breve{\breve{D}}_{min}$-ով նշանակենք, համապատասխանաբար, $\widehat{F}_m(n)$-ի ստորին եզրային և $\breve{F}_m(n)$-ի վերին եզրային էլեմենտների բազմությունը: Նկար 3.4-1-ում բերվում է երկրաչափական մեկնաբանումը Ξ_5^3-ի օրինակի վրա:



Նկար 3.4-1: $\widehat{D}_4(3)$, $\breve{D}_4(3)$ և $\widehat{F}_4(3)$, $\breve{F}_4(3)$ բազմությունները Ξ_5^3-ում:

$\Xi_{m+1}^{n} \backslash D_m(n)$-ը կարելի է գտնել՝ ունենալով $\hat{F}_m(n)$-ը /կամ $\check{F}_m(n)$-ը/.

Թեորեմ 3.4-1: $\Xi_{m+1}^{n} \backslash D_m(n) = \bigcup_{d\in\hat{F}_m(n)} V(d) = \bigcup_{d\in\check{F}_m(n)} V(d)$:

Այս բաժնում գտնվում են նաև մինիմալ և մաքսիմալ ռանգ ունեցող վերին ոչ հիպերգրաֆային հաջորդականությունների դասեր:

$\bar{r}_{min}$ –ով և $\bar{r}_{max}$-ով նշանակենք, համապատասխանաբար, $\hat{\hat{D}}_{max}$-ի մինիմալ և մաքսիմալ ռանգ ունեցող էլեմենտների ռանգը: Թեորեմ 3.4.1-1-ով գտնում ենք $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ, որն ունի մինիմալ ռանգ:

Օգտվելու ենք մինիմալ ռանգ ունեցող վերին հիպերգրաֆային d_{min} հաջորդականության ընդհանուր տեսքով ներկայացումից.

$d_{min} = \left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1}, \overbrace{d_{n_1+1},\cdots,d_{n_1+n_2}}^{n_2}, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n_3}\right)$, որտեղ $m > d_{n_1+1} \geq \cdots \geq d_{n_1+n_2} > m_{mid}$; $n_1, n_2, n_3 \geq 0$; $n_1 + n_2 + n_3 = n$, և $m_{mid} = (\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \cdots, \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil)$:

Հետևյալ երկու թեորեմներում ենթադրվում է, որ $m = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots + 2^{k_p}$, $k_1 > k_2 > \cdots > k_p \geq 0$; և n_1-ը d_{min}-ում m արժեքով կոմպոնենտների քանակն է:

Թեորեմ 3.4.1-1:

(1) Եթե $m \neq 2^t$ որևէ t-ի համար, ապա

(ա) $\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1},\ 2^{k_1} + 1, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$-ը $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ է:

(բ) $r(\bar{d}_{min}) = \bar{r}_{min}$:

(2) Եթե $m = 2^t$ որևէ t-ի համար, ապա

(ա) $\bar{d}_{min} = \left(\overbrace{m,\cdots,m}^{n_1}, m_{mid} + 1, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$-ը $\hat{F}_m(n)$-ի մինիմալ էլեմենտ է:

(բ) $r(\bar{d}_{min}) = \bar{r}_{min}$:

Թեորեմ 3.4.1-2-ով կառուցվում են $\hat{F}_m(n)$-ի մի շարք մինիմալ էլեմենտներ.

Թեորեմ 3.4.1-2:

(1) Եթե $m \neq 2^t$ որևէ t-ի համար, ապա

$$\left(\overbrace{m,\cdots,m,m-l}^{n_1}, 2^{k_1} + l + 1, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$$

տեսքով տրվող հաջորդականությունները, որտեղ $l = 1, \cdots, (m - 2^{k_1} - 1)/2$, հանդիսանում են $\hat{F}_m(n)$-ի $\bar{r}_{min}$ ռանգի մինիմալ էլեմենտներ:

(2) Եթե $m = 2^t$, ապա

$$\left(\overbrace{m,\cdots,m,m-l}^{n_1}, m_{mid} + l + 1, \overbrace{m_{mid},\cdots,m_{mid}}^{n-n_1-1}\right)$$

տեսքով տրվող հաջորդականությունները, որտեղ $l = 1, \cdots, (m - m_{mid} - 1)/2$, հանդիսանում են $\hat{F}_m(n)$-ի $\bar{r}_{min}$ ռանգի մինիմալ էլեմենտներ:

Նշված արդյունքներից որպես հետևանք ստանում ենք հետևյալ կարևոր պնդումը.

Թեորեմ 3.4.2-2: $\widehat{H}$-ի բոլոր հաջորդականությունները, որոնց ռանգը $\bar{r}_{min}$-ից փոքր է, հիպերգրաֆային են; և բոլոր հաջորդականությունները, որոնց ռանգը r_{max}-ից մեծ է, հիպերգրաֆային չեն:

Բաժինը ամփոփվում է $\widehat{H}$-ում հեռավորությունների դիտարկմամբ՝ գտնվում են բանաձևեր՝ հաշվելու մինիմալ, մաքսիմալ և միջին շերտերի հեռավորությունը $\bar{r}_{min}$ և r_{max} համարն ունեցող շերտերից:

Չորրորդ գլխում դիտարկվում են դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրներ, որոնցում ներմուծվում են նոր պայմաններ/սահմանափակումներ ի լրումն դասական տարբերակների, որոնք քննարկվել են Առաջին գլխում ([1], [2], [3], [4], [6], [10], [12], [16], [17], [18], [19], [23], [29], [30]): Հետազոտվում են համապատասխան խնդիրների բարդությունները, մշակվում են նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներ: Այստեղ կարևոր է առանձնացնել տրված սահմանափակումներով բինար մատրիցի սյուն-առ-սյուն կառուցման G ագահ ալգորիթմը: Ալգորիթմի կարևոր կիրառություններից է գումարային բալանսով մինիմալ բարձրության բինար ծառի կառուցումը: Այսպիսին է ծառի մոդելը, որը ստեղծվում է ըստ գրաֆիկական բնութագրերի պատկերների դասակարգման խնդրի համար, և որը կիրառվում է հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման “Armenian Reader” համակարգում:

Չորրորդ գլխի *առաջին բաժնում* հետազոտվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների դաս, որտեղ օգտագործվում է *<u>շերտային պրոյեկցիայի</u> գաղափարը*. բինար մատրիցում *ուղղահայաց շերտը* սյուների խումբ է; *հորիզոնական շերտը*՝ տողերի խումբ: Մասնավորապես, դիտարկվում են 2 լայնությամբ շերտերը, և առանձնացվում են հետևյալ տեսակները (համապատասխան նշանակումներով). ուղղահայաց շերտեր սյուների բոլոր զույգերի համար՝ A_VP; ուղղահայաց շերտեր հարևան սյուների զույգերի համար՝ N_VP; ուղղահայաց շերտեր սյուների $(1, j)$ զույգերի համար՝ 1_VP:

Սահմանում 4.1-1: (1) $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{C_n^2})$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի A_VP *պրոյեկցիա,* եթե s'_t-ն հավասար է X մատրիցի սյուների t-րդ զույգի ընդհանուր 1-երի քանակին, $t = 1, \cdots, C_n^2$ (ենթադրվում է, որ X -ի սյուների զույգերը նախապես համարակալված են):

(2) $S' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{n-1})$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի N_VP *պրոյեկցիա,* եթե s'_j-ն հավասար է X մատրիցի j-րդ և $(j+1)$-րդ սյուների ընդհանուր 1-երի քանակին, որտեղ $j = 1, \cdots, n-1$:

(3) $S' = (s'_2, \cdots, s'_n)$ վեկտորը կոչվում է $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ բինար մատրիցի 1_VP *պրոյեկցիա,* եթե s'_j-ն հավասար է X մատրիցի առաջին և j-րդ սյուների ընդհանուր 1-երի քանակին, որտեղ $j = 2, \cdots, n$:

Գոյության խնդիրներ. $\boldsymbol{HV\_AVP}$, $\boldsymbol{HV\_NVP}$, $\boldsymbol{HV\_\Sigma NVP}$, $\boldsymbol{HV\_1VP}$

Գոյություն ունի՞ արդյոք բինար մատրից ըստ տրված.

$\boldsymbol{HV\_AVP}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և A_VP պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{HV\_NVP}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և N_VP պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{HV\_\Sigma NVP}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց պրոյեկցիաների և N_VP պրոյեկցիայի տարրերի գումարի:

$\boldsymbol{HV\_1VP}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և 1_VP պրոյեկցիաների:

Թվարկված խնդիրների բարդության հետազոտությունների արդյունքը ներկայացված է հետևյալ աղյուսակում.

Աղյուսակ 4.1-1: Դիտարկված խնդիրները և նրանց բարդությունը:

HV_AVP	HV_1VP	HV_NVP	$HV\_\Sigma NVP$
NP-լրիվ	P	?	NP-լրիվ

Խնդիրների հաջորդ խմբում առկա է *լրացուցիչ սահմանափակում՝ մատրիցի տողերի տարբեր լինելը*:

Գոյություն ունի՞ արդյոք տարբեր տողերով բինար մատրից ըստ տրված.

$\boldsymbol{HV\_AVP\_d}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և A_VP պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{HV\_NVP\_d}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և N_VP պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{HV\_1VP\_d}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց և 1_VP պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{HV\_d}$ **-** Հորիզոնական, ուղղահայաց պրոյեկցիաների:

$\boldsymbol{V\_d}$ **-** Ուղղահայաց պրոյեկցիայի:

Բարդության հետազոտությունների արդյունքը ներկայացվում է հետևյալ աղյուսակում.

Աղյուսակ 4.1-2: Տարբեր տողերի սահմանափակումով խնդիրների բարդությունը:

HV_AVP_d	HV_1VP_d	HV_NVP_d	HV_d	V_d
NP-լրիվ	Բաց խնդիր (Հիպեր-գրաֆի աստիճանային հաջորդականության խնդիր)	?	HV_1VP_d	Բաց խնդիր (Տրոհումների ասոցացված վեկտորների խնդիր)

Դիտարկված խնդիրները հիմնականում NP-լրիվ կամ բաց խնդիրներ են, և հետևաբար, հետամուտ ենք լինում նրանց մոտավոր լուծման ալգորիթմներին: Խնդիրները ներկայացվում են ամբողջարժեք գծային սահմանափակումների համակարգի տեսքով; այնուհետև կիրառվում է Լագրանժյան ռելաքսացիայի մեթոդը և փոփոխականի տրոհման տեխնիկան; մշակվում են տրոհված խնդիրների լուծման պարզ ալգորիթմներ: Աշխատանքում ներկայացվում են միայն HV_d և HV_AVP խնդիրների լուծումները (մյուս խնդիրները կարելի է լուծել համանման ձևով):

Մասնավորապես, HV_d խնդրի ներկայացումը հետևյալն է.

$$\boldsymbol{(HV_d)}\qquad
\begin{aligned}
&\mathbf{(1)}\ \textstyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x_{i,j}} = \boldsymbol{s_j},\ \ \boldsymbol{j} = \mathbf{1},\cdots,\boldsymbol{n}\\
&(2)\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = r_i,\ i = 1,\cdots,m\\
&(3)\begin{cases} y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j}\\ y_{p(i',i''),j} \le x_{i',j}\\ y_{p(i',i''),j} \ge x_{i',j} + x_{i'',j} - 1\end{cases} \qquad 1 \le i' < i'' \le m, j = 1,\cdots,n\\
&(4)\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} y_{p(i',i''),j} < r_{i''},\ \ 1 \le i' < i'' \le m\\
&(5)\ x_{i,j} \in \{0,1\},\ \ y_{i,j} \in \{0,1\}
\end{aligned}$$

որտեղ $(r_1, \cdots, r_m)$-ը և $(s_1, \cdots, s_n)$-ը ամբողջարժեք վեկտորներ են, $r_1 \leq \cdots \leq r_m$, և $X = \{x_{i,j}\}_{m \times n}$-ը և $Y = \{y_{(i',i''),j}\}_{C_m^2 \times n}$-ը անհայտ փոփոխականներ են:

Չորրորդ գլխի *երկրորդ բաժնում* դիտարկվում է մեկ այլ մոտեցում՝ ագահ ալգորիթմական տեխնիկան /greedy technique/ դիսկրետ տոմոգրաֆիայի՝ տարբեր տողերի սահմանափակումն ունեցող խնդիրների մոտավոր լուծման համար: Մշակվում է սյուն առ սյուն կառուցման ալգորիթմ, որը կիրառվում է V_d խնդրի լուծման համար: Ապացուցվում է ալգորիթմի լոկալ քայլի օպտիմալությունը, և տրվում է աշխատանքի արդյունքի երաշխիքի գնահատական:

Դիտարկենք $m \times n$ չափանի բինար մատրիցների $U(S)$ դասը՝ կազմված ըստ սյուների գումարի $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորի; և դիցուք՝ $\bar{U}(S)$-ը $U(S)$-ի այն ենթադասն է, որում մատրիցի տողերն իրարից տարբեր են: V_d խնդիրը կձևակերպվի որպես՝ տրված S վեկտորի համար գոյություն ունի՞ արդյոք մատրից $\bar{U}(S)$ դասում:

Սահմանենք $DP: U(S) \to [0, C_m^2]$ ֆունկցիան (նպատակային ֆունկցիան), որը $U(S)$ դասի յուրաքանչյուր A մատրիցին համապատասխանության մեջ է դնում նրա տարբեր տողերի զույգերի քանակը՝ $DP(A)$: Դիտարկենք V_d խնդրի օպտիմիզացիոն տարբերակը ըստ DP նպատակային ֆունկցիայի՝

(V_d ^{opt}): Գտնել $A_{opt} \in U(S)$ այնպես, որ $DP(A_{opt}) = \max_{A \in U(S)} DP(A)$:

Քանի որ $DP(A) = C_m^2$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $A \in \bar{U}(S)$, ապա $\bar{U}(S)$ դասի դատարկ չլինելու դեպքում V_d ^{opt} խնդրի լուծումը լուծում է հանդիսանում նաև V_d խնդրի համար: Նկարագրենք V_d ^{opt} խնդրի լուծման $GREEDY$ (G) ագահ ալգորիթմը:

Ալգորիթմ G

G ալգորիթմը մուտքում ստանում է սյուների գումարի $S = (s_1, \cdots, s_n)$ վեկտորը և սյուն առ սյուն կառուցում է մատրից $U(S)$ դասից: Առանց ընդհանրությունը խախտելու կարող ենք ենթադրել, որ $s_i \geq m - s_i, i = 1, \cdots, n$:

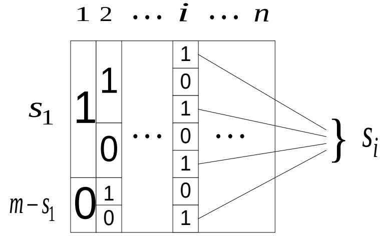
Քայլ 1. Մատրիցի առաջին սյունը կառուցել տեղադրելով 1-երը առաջին s_1 տողերում, և 0-ները՝ մնացած $m - s_1$ տողերում: Սյան վրա կստանանք երկու ինտերվալ՝ $d_{1,1}^G = s_1$ և $d_{1,2}^G = m - s_1$ երկարություններով; տարբեր տողերի զույգերի քանակը (նպատակային ֆունկցիայի արժեքը) ըստ առաջին սյան կլինի՝ $d_{1,1}^G \cdot d_{1,2}^G$:

$A_{G,t}$-ով նշանակենք ալգորիթմի t-րդ քայլի արդյունքում կառուցված ենթամատրիցը, և $\Delta DP_t(G)$-ով՝ t-րդ քայլի արդյունքում նպատակային ֆունկցիայի աճը, այսինքն նոր առաջացած տարբեր տողերի զույգերի քանակը՝ $\Delta DP_t(G) = DP(A_{G,t}) - DP(A_{G,t-1})$: $d_{t,j}^G$-ով նշանակենք t-րդ սյան հերթական՝ j-րդ ինտերվալի երկարությունը:

Դիցուք՝ արդեն կառուցել ենք առաջին $(k-1)$ սյուները, և դիցուք՝ $(k-1)$-րդ սյունը բաղկացած է p հատ ոչ զրոյական երկարության ինտերվալներից՝ $d_{k-1,1}^G, d_{k-1,2}^G, \cdots, d_{k-1,p}^G$:

Քայլ k. Կառուցել k-րդ սյունը՝ հերթական $d_{k-1,i}^G$ երկարության ինտերվալը տրոհելով $d_{k-1,i,0}^G$ և $d_{k-1,i,1}^G$ մասերի՝ կազմված 0-ներից և 1-երից այնպես, որ $\sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,0}^G = m - s_k$ և $\sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,1}^G = s_k$: Ինտերվալի տրոհումը պետք է այնպես կատարվի, որ մաքսիմիզացնի նպատակային ֆունկցիայի աճը՝ $\Delta D_k(G) = \sum_{i=1}^{p} d_{k-1,i,1}^G \cdot d_{k-1,i,0}^G$-ն:

Կառուցված մատրիցի բոլոր տողերն իրարից տարբեր կլինեն այն և միայն այն դեպքում, երբ վերջին սյունը կազմված լինի մեկ երկարության ինտերվալներից: Ալգորիթմի աշխատանքի սխեմատիկ պատկերը բերված է Նկար 4.2-1-ում:



Նկար 4.2-1: Կառուցվող մատրիցը ըստ G ալգորիթմի:

Այժմ մանրամասնորեն նկարագրենք k-րդ քայլը: r_k-ով նշանակենք այսպես ասած "հավելյալ 1-երի" քանակը՝ $r_k = s_k - (m - s_k)$: Դիցուք՝ $(k-1)$-րդ սյունում կա l հատ կենտ երկարության ինտերվալ:

1) *Առաջին փուլ՝ r_k հավելյալ 1-երի տեղադրում*

ա) $r_k \le l$

$(k-1)$-րդ սյան կենտ երկարության ինտերվալներից կամայական ձևով ընտրվում է r_k հատը, և յուրաքանչյուրի վրա տեղադրվում մեկական 1:

բ) $r_k > l$

Կենտ երկարության բոլոր ինտերվալների վրա տեղադրվում է մեկական 1: Այնուհետև, 1-երը բաշխվում են երկուական՝ սկսելով զույգ երկարության ինտերվալներից, և շարունակվում կենտերի վրա, և այսպես հաջորդաբար, մինչև որ r_k հատ 1-երը սպառվեն:

2) *երկրորդ փուլ՝ մնացած 1-երի և 0-ների տեղադրում*

ա) $r_k \le l$

Մնացած $l - r_k$ հատ կենտ երկարության ինտերվալների մի կեսի վրա տեղադրվում է մեկական 0, մյուս կեսի վրա՝ մեկական 1; որից հետո բոլոր ինտերվալները տրոհվում են երկու հավասար մասերի, որոնց վրա էլ տեղադրվում են հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

բ) $r_k > l$

Բոլոր ինտերվալները տրոհվում են երկու հավասար մասերի, որոնց վրա էլ տեղադրվում են հավասար թվով 1-եր և 0-ներ:

Թեորեմ 4.2.1-1-ը պնդում է, որ G ալգորիթմը լոկալ քայլում օպտիմալ է, և որ լոկալ քայլի օպտիմալ կառուցումը միակն է՝ այն ըստ G ալգորիթմի է:

Թեորեմ 4.2.1-1: *(1)* G ալգորիթմի յուրաքանչյուր քայլը ապահովում է DP նպատակային ֆունկցիայի մաքսիմալ աճ; *(2)* Եթե որևէ սյան կառուցման արդյունքում DP նպատակային ֆունկցիան ստանում է մաքսիմալ աճ, ապա այդ սյունը կառուցված է ըստ G ալգորիթմի:

Այս բաժնում հետազոտվում են նաև G ալգորիթմի հատկությունները:

Գնահատվում է G ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքի երաշխիքը՝ օգտագործելով *բազմության ագահ ծածկույթ* մեթոդը:

Թեորեմ 4.2.3-1: Սյուների գումարի տրված $(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ վեկտորով $m \times n$ չափանի բինար մատրիցի կառուցման G ագահ ալգորիթմի աշխատանքի արդյունքում չտարբերված տողերի զույգերի մասը չի գերազանցում $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_n$ թիվը, որտեղ՝ $\xi_i = 1 - \frac{s_i(m-s_i)}{C_m^2}, i = 1,2, \cdots, n$:

Երկրորդ բաժնի եզրափակիչ մասում ներմուծվում են "տարբերական" բալանսով բինար ծառեր ի լրումն դասական կշռա-բալանսավորված ծառերի, սահմանվում է նաև գումարային բալանսի գաղափարը: G ալգորիթմը կիրառվում է գումարային տարբերական բալանսով մինիմալ բարձրություն ունեցող ծառի կառուցման համար:

Դիցուք՝ T_m-ը ոչ դատարկ, m տերև/կշիռ ունեցող բինար ծառ է, և T_l-ը և T_r-ը նրա արմատի ձախ և աջ ենթածառերն են՝ l և r կշիռներով (ենթադրվում է, որ $r \geq l$): $\delta(T_m) = r - l$ տարբերությունը կոչվում է T_m-ի տարբերական բալանս արմատում:

Սահմանում 4.2.4-4: Տրված $d, 0 \leq d \leq m - 1$ ամբողջ թվի համար T_m-ը կոչվում է d տարբերական բալանսով ծառ, կամ պատկանում է $WDB[d]$ դասին, եթե.
(1) $\delta(T_m) \leq d$; (2) T_m-ի ձախ և աջ ենթածառերը պատկանում են $WDB[d]$ դասին:

Սահմանում 4.2.4-5: Տրված են $D_0, \cdots, D_n$, $0 \leq D_i \leq m - 1$, $i = 0, \cdots, n$ ամբողջ թվերը: Կասենք, որ T_m ծառը i -րդ մակարդակում ունի D_i գումարային տարբերական բալանս, եթե $R_i - L_i \leq D_i$, որտեղ R_i-ն i-րդ մակարդակում արմատ ունեցող բոլոր աջ ենթածառերի կշիռների գումարն է, իսկ L_i-ն նույն գումարն է ձախ ենթածառերի համար:

Սահմանում 4.2.4-6: T_m ծառը կոչվում է $\{D_0, \cdots, D_n\}$ գումարային տարբերական բալանսով ծառ, եթե i-րդ մակարդակում գումարային բալանսը D_i է, $i = 0, \cdots, n$:

Չորրորդ գլխի *երրորդ բաժնում* պատկերների՝ ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրի համար մշակվել է գումարային տարբերական բալանսով բինար ծառի մոդելը, և այն կիրառվել է հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման "Armenian Reader" համակարգում:

Դիցուք՝ $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$-ն գրանշանների բազմություն է, որը հայերենի այբուբենի տառերի, կետադրական նշանների, արաբական թվանշանների, ինչպես նաև այլ սիմվոլների (չակերտներ, փակագծեր, և այլն) հավաքածու է: Անհրաժեշտ է ճանաչել գրանշանները (որոնք կարող են տրված լինել տարբեր տառատեսակներով, չափերով, թեքությամբ և այլն), կամ որ նույնն է՝ դասակարգել պատկերները, որտեղ դասերի քանակը հավասար է A այբուբենի տարրերի քանակին: Յուրաքանչյուր գրանշան կարող է նկարագրվել պատկերի մի շարք գրաֆիկական և կառուցվածքային բնութագրերի միջոցով՝ բարձրություն, լայնություն, կշիռ, պրոյեկցիաներ, ծանրության կենտրոն, եզրագիծ, որոշակի ֆրագմենտի առկայություն/բացակայություն, եզրային կետերի քանակ, հատումներ, և այլն: Խնդիրը, մի կողմից, բնութագրերի ճիշտ ընտրության, մյուս կողմից՝ պատկերի ճանաչման ալգորիթմի կառուցման մեջ է ըստ այդ բնութագրերի:

Սահմանվում է տեստերի $T = \{t_1, t_2, \cdots, t_k\}$ հավաքածուն, որտեղ T-ի յուրաքանչյուր տեստ հարց է կամ հարցերի կոմբինացիա պատկերի որոշակի բնութագրի մասին, և բինար ծառը կառուցվում է հետևյալ ձևով. A բազմությունը վերագրվում է ծառի V_0 արմատին: Ծառի յուրաքանչյուր ոչ եզրային V_i գագաթի համար (ներառյալ արմատը)

T-ից ընտրվում է տեստ՝ t_{V_i}, որի կիրառման արդյունքում V_i գագաթին վերագրված բազմությունը տրոհվում է երկու ենթաբազմությունների, որոնք էլ վերագրվում են V_i–ի ձախ և աջ ենթածառերի արմատներին: Պրոցեսը շարունակվում է այնքան, քանի դեռ գագաթներին վերագրված բազմությունները պարունակում են մեկից ավելի էլեմենտ: Եզրային գագաթներին վերագրվում են դասերը՝ գրանշանները: Դասակարգման պրոցեսը սկսվում է ծառի արմատից. կիրառվում է համապատասխան տեստը, և ըստ տեստի արդյունքի անցում է կատարվում ձախ կամ աջ ենթածառին, և այդպես շարունակ, մինչև հասնի որևէ եզրային գագաթի: Յուրաքանչյուր գրանշանի ճանաչման բարդությունը կախված է ճանապարհի երկարությունից (ծառի արմատից մինչև եզրային գագաթ), ինչպես նաև տեստերի կիրառման ալգորիթմական բարդությունից: Տեստի բարդությունը վերագրվում է գագաթին կշռի տեսքով: Ծառի կառուցումը (տեստերի ընտրությունը, նրանց կիրառման կարգը, և այլն) կարող է հետապնդել տարբեր նպատակներ՝ ծառի բարձրության մինիմիզացիա, ծառի ամենաերկար կշռված ճյուղի մինիմիզացիա, և այլն: “Armenian Reader” համակարգում կիրառվել է հետևյալ սկզբունքը. (1) ծառի արմատից փոքր հեռավորություն ունեցող գագաթների համար ընտրվել են այնպիսի տեստեր, որոնք մի կողմից հեշտ հաշվարկելի են, մյուսից՝ տրոհում են բազմությունը իրար մոտ հզորության ենթաբազմությունների; (2) արմատից մեծ հեռավորություն ունեցող գագաթների վրա (այստեղ գրանշանների փոքր խմբեր են համեմատաբար իրար նման պատկերներով), կիրառվում են գրանշանի սպեցիֆիկ հատկություններ ստուգող տեստեր: Ծառի (1) մասի արդյունավետ կառուցման համար հաշվարկվել է գումարային տարբերական բալանսը և կիրառվել է G ագահ ալգորիթմը:

Հինգերորդ գլուխը նվիրված է մոնոտոնության սահմանափակմանը ենթակա մոդելներում կիրառական ալգորիթմների մշակմանը ([5], [11], [15], [20], [28], [31]): Առաջարկվում է մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մոտեցում՝ հիմնված բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման տեխնիկայի վրա: Ξ_{m+1}^n-ում մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչումը հանգեցվում է Բուլյան դեպքին և Գ.Հանսելի շղթաների կառուցվածքների օգտագործմանը; և այս ճանապարհով. /ա/ ապահովվում է մինիմալ հիշողության օգտագործումը; /բ/ ալգորիթմի աշխատանքը տրոհվում է անկախ հաշվարկային պրոցեսների, որի արդյունքում հասանելի է դառնում հաշվարկների զուգահեռ իրականացումը: Ξ_{m+1}^n-ի խորանարդատիպ տրոհման օգտագործմամբ մշակվում է քանակական ատրիբուտներով ասոցիատիվ կանոնների պեղման ալգորիթմ, որը նպատակ ունի նոր միջոցներ տրամադրել կիրառական խնդիրներում, ինչպիսին է, օրինակ, ցանցերի ներխուժման հայտնաբերումը LOG ֆայլերի վերլուծման օգնությամբ: Այս գլխում առաջարկվում է նաև շղթաների տրոհման ալգորիթմ մասնակի կարգավորված $P(n,3)$ բազմության համար:

Հինգերորդ գլխի *առաջին բաժնում* դիտարկվում է Ξ_{m+1}^n-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման խնդիրը:

Նախ, ցույց է տրվում, որ Ξ_{m+1}^n-ի խորանարդատիպ տրոհումը պահպանում է մոնոտոնությունը: Դիցուք՝ Ξ_{m+1}^n-ը տրոհված է ուղղահայաց համարժեքության $\{V_i\}$ դասերի: V_i-երը (ինչպես նաև նրանցում համապատասխան ենթակառուցվածքները՝

գագաթ, կող, շղթա, և այլն) կանվանենք *սկզբնաղբյուր*, իսկ նրանց համապատասխան $E(V_i)$ բինար խորանարդները (համապատասխան ենթակառուցվածքները)՝ *ինդուցված*:

Թեորեմ 5.1.1-1: Դիցուք՝ Ξ_{m+1}^n-ը տրոհված է ուղղահայաց համարժեքության $\{V_i\}$ դասերի: Դիցուք՝ $F: \Xi_{m+1}^n \to \{0,1\}$-ը որևէ բինար ֆունկցիա է, և $f_i: E(V_i) \to \{0,1\}$ ֆունկցիաները ստացվում են F-ից ըստ համարժեքության դասերի այնպես, որ կամայական $\beta \in E(V_i)$ համար $f_i(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$, որտեղ b-ն β-ի սկզբնաղբյուրն է: Այդ դեպքում, եթե F ֆունկցիան մոնոտոն է, ապա մոնոտոն են նաև բոլոր f_i ֆունկցիաները:

Այնուհետև, բազմարժեք ցանցի խորանարդատիպ տրոհման կիրառմամբ առաջարկվում է նոր մեթոդ՝ կառուցվում են երկու ալգորիթմներ, որտեղ գուշակին ներկայացվող գագաթներ ընտրելու պրոցեսը բաժանվում է ենթապրոցեսների՝ տրոհելով Ξ_{m+1}^n-ը չհատվող բինար խորանարդների: Դիցուք՝ $F: \Xi_{m+1}^n \to \{0,1\}$-ը մոնոտոն ֆունկցիա է՝ տրված Ω_F գուշակի միջոցով: Ալգորիթմ $CUBE\_SPLIT1$ ($CS1$)-ը նախ տրոհում է Ξ_{m+1}^n-ը ուղղահայաց համարժեքության $|\widehat{H}|$ դասերի, որից հետո յուրաքանչյուր դասում ճանաչում է համապատասխան մոնոտոն ֆունկցիան ըստ Գ.Հանսելի ալգորիթմի, և այնուհետև, միավորում է արդյունքները:

Ալգորիթմ $CS1$:

1. Տրոհել Ξ_{m+1}^n-ը ուղղահայաց համարժեքության դասերի՝ $V_1, V_2, \cdots, V_{|\widehat{H}|}$:
2. Կազմել համապատասխան ինդուցված միավոր խորանարդները՝ $E(V_1), E(V_2), \cdots, E(V_{|\widehat{H}|})$:
3. Յուրաքանչյուր $E(V_i)$-խորանարդում սահմանել $f_i: E(V_i) \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $\beta \in E(V_i)$-ի համար $f_i(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$, որտեղ b-ն β-ի սկզբնաղբյուր գագաթն է Ξ_{m+1}^n-ում: f_i-ն մոնոտոն է (Թեորեմ 5.1.1-1), և տրվում է Ω_F գուշակի միջոցով: Կիրառել շղթաների տրոհման Գ.Հանսելի մեթոդը f_i մոնոտոն ֆունկցիայի ճանաչման համար:
4. Միավորել F-ում $|\widehat{H}|$ հատ բինար ճանաչման արդյունքները:

Թեորեմ 5.1.2-1: Դիցուք՝ $\phi_{CS1}(n)$-ը հարցումների մինիմալ քանակն է, որը բավարար է Ալգորիթմ $CS1$ -ի միջոցով Ξ_{m+1}^n-ում որոշված n փոփոխականի կամայական մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար: Այդ դեպքում,

$\phi_{CS1}(n) = \sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k \cdot \left(\frac{m}{2}\right)^k \cdot \left(C_k^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor} + C_k^{\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1}\right)\right)$ զույգ m-երի համար,

$\phi_{CS1}(n) = \left(\frac{m+1}{2}\right)^n \cdot \left(C_n^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor} + C_n^{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1}\right)$ կենտ m-երի համար:

Դուրս է բերվում նաև բարդության գնահատականի ասիմպտոտիկան՝

$\phi_{CS1}(n) \to \frac{4m^n}{\sqrt{2\pi n}}$, երբ $n \to \infty$:

Ալգորիթմ $CUBE\_SPLIT2$ ($CS2$)-ը նախ կիրառում է Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմը՝ ճանաչելու համար մոնոտոն ֆունկցիան $\widehat{H}$-ին պատկանող մասում, և դիցուք՝ M-ը ֆունկցիայի 1 արժեքի կետերի բազմությունն է: Այնուհետև, դիտարկվում են Ξ_{m+1}^n-ի ուղղահայաց համարժեքության դասերից միայն նրանք, որոնք կետ են պարունակում M-ից:

Ալգորիթմ $CS2$:

1. Տրոհել Ξ_{m+1}^{n}-ը ուղղահայաց համարժեքության դասերի՝ $V_1, V_2, \cdots, V_{|\widehat{H}|}$:
2. Կազմել համապատասխան ինդուցված միավոր խորանարդները՝ $E(V_1), E(V_2), \cdots, E(V_{|\widehat{H}|})$:
3. $\widehat{H}$-ում սահմանել $F': \widehat{H} \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $b \in \widehat{H}$, $F'(b) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F(b) = 1$: Պարզ է, որ F'-ը մոնոտոն է, և տրվում է Ω_F գուշակի միջոցով:
4. Կիրառել Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմը $\widehat{H}$-ում F' ֆունկցիայի ճանաչման համար, և M-ով նշանակել F'-ի 1 արժեքի կետերի բազմությունը /$\widehat{H}$-ում/:
5. Յուրաքանչյուր $e \in M$ էլեմենտի համար դիտարկել ուղղահայաց համարժեքության այն V_e դասը, որին e-ն պատկանում է, և նրան ինդուցված $E(V_e)$ միավոր խորանարդը: $E(V_e)$-ում սահմանել $f_e: E(V_e) \to \{0,1\}$ բինար ֆունկցիան հետևյալ ձևով. կամայական $\beta \in E(V_e)$ համար $f_e(\beta) = 1$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $F'(b) = 1$, որտեղ b-ն β-ի սկզբնաղբյուրն է $\widehat{H}$-ում: f_e-ն մոնոտոն է (Թեորեմ 5.1.1-1), և տրվում է Ω_F գուշակի միջոցով: Կիրառել Գ.Հանսելի շղթաների տրոհման մեթոդը f_e ֆունկցիայի ճանաչման համար:
6. Միավորել F-ում $|M|$ հատ բինար ճանաչման արդյունքները:

Թեորեմ 5.1.2-2: Դիցուք՝ $\phi_{CS2}(n)$-ը հարցումների մինիմալ քանակն է, որը բավարար է Ալգորիթմ $CS2$-ի միջոցով Ξ_{m+1}^{n}-ում որոշված n փոփոխականի կամայական մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար: Այդ դեպքում,

$$\phi_{CS2}(n) \leq (|M_{\widehat{H}}| + \lfloor log_2 m \rfloor \cdot |N_{\widehat{H}}|) + |M| \cdot \left(C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \right),$$

որտեղ $M_{\widehat{H}}$-ը և $N_{\widehat{H}}$-ը $\widehat{H}$-ի միջին շերտերի կետերի բազմություններն են:

Ալգորիթմ $CS2$-ի, ինչպես նաև Վ.Ալեքսեևի ալգորիթմի բարդության գնահատականները հիմնված են բազմարժեք խորանարդի միջին շերտի/շերտերի կետերի քանակի վրա: Այդ քանակները մինչ այժմ պարզ գնահատականներ չունեին, և այդ պատճառով ընկալելի չէին:

Առաջին դիտարկվող տարբերակը ուղղակի կոմբինատոր գնահատումն է, ինչը սակայն անարդյունավետ է այն պատճառով, որ ասիմպտոտիկ գնահատման թամբային մեթոդը դիտարկվող կետի անմիջական շրջակայքում չի աշխատում: Այս բաժնում բերվում է այլընտրանքային հավանականային մոտեցում, որի արդյունքում ստացվում է քանակների գնահատականի պարզեցված և օգտագործելի տեսք:

Հինգերորդ գլխի *երկրորդ բաժնում* Ξ_{m+1}^{n}-ի խորանարդատիպ տրոհումը օգտագործվում է տվյալների պեղման քանակական ասոցիատիվ կանոնների դուրսբերման մոդելում, որտեղ ի տարբերություն բինար դեպքի, առարկաների առկա կամ բացակա լինելուց բացի հաշվի է առնվում նաև նրանց պատիկությունը: Դիտարկվող մոդելում ենթադրվում է, որ բոլոր ատրիբուտները մոնոտոն են՝ ատրիբուտի արժեքի աճը մեծացնում է առարկայի հանդես գալու հավանականությունը: Այստեղ, ինչպես և կանոնների պեղման տրադիցիոն մոդելներում, կարևոր փուլ է հաճախ հանդիպող առարկաների բազմությունների կառուցման խնդիրը:

Դիցուք՝ տրված է T աղյուսակը n ատրիբուտների բազմությամբ՝ $A_1, A_2, \cdots, A_n$: T-ի տողերը տրանզակցիաներ են, որտեղ առկա են քանակական ատրիբուտներ: Ենթադրենք, որ A_i ատրիբուտի արժեքների տիրույթը $[0, m_i]$ է: Այս ենթադրությամբ, առարկաների բազմությունը կարելի է պատկերել որպես.
$\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n} = \Xi_{m_1} \times \Xi_{m_2} \times \cdots \times \Xi_{m_n} = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | \, a_i \in \Xi_{m_i}, i \in \overline{1,n}\}$ ամբողջարժեք ցանցի էլեմենտ, որտեղ $\Xi_{m_i} = \{0,1, \cdots, m_i\}$: T-ում հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության գտնելու խնդիրը հանգում է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$-ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչմանը, քանի որ ըստ մոնոտոնության հատկության, եթե $(a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$-ը հաճախ հանդիպող է T-ում, ապա հաճախ հանդիպող է նաև $(a_1, \cdots, a_i - 1, \cdots, a_n)$-ը: Կառուցվում է $\Xi^n_{m_1,m_2,\cdots,m_n}$ ցանցի խորանարդատիպ տրոհումը, և մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման $CUBE\_SPLIT\,(CS)$ ալգորիթմը, որոնք ընդհանրացնում են Ξ^n_{m+1}-ի տրոհումը և $CS1$ և $CS2$ ալգորիթմները:

Որպես հնարավոր կիրառման օրինակ դիտարկվել է ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման խնդիրը: Տրված են համակարգչի արձանագրային աշխատանքային LOG ֆայլերը, որոնց օգնությամբ հարկ է գտնել համակարգչի աշխատանքի ստացիոնար վարքից շեղման նկարագրերը: LOG ֆայլը դինամիկ աղյուսակ է, որի տողերը ասույթներ են ատրիբուտների որոշ խմբերի տերմիններով: Քանակական ասոցիատիվ կանոնը դա ըստ վիճակագրության կայացած տրամաբանական եթե-ապա տիպի կանոն է, որի պեղումը հիմնվում է հաճախ կրկնվող հավաքների հայտնաբերման վրա: Նման կանոններ կիրառվել են SPARTA [5] համակարգում, սակայն դիտարկվել է բինար ատրիբուտների դեպքը: CS ալգորիթմը հնարավոր է դարձնում քանակական ատրիբուտներով կանոնների պեղումը՝ ընդլայնելով պեղման ենթակա կանոնների դասը:

Հինգերորդ գլխի *երրորդ բաժնում* դիտարկվում է n-չափանի բազմարժեք ցանց, որի գագաթների $P(n, 3)$ բազմությունը համապատասխանում է 3-համասեռ հիպերգրաֆների բազմությանը: $P(n, 3)$–ում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիաների տրոհումների ասոցացված վեկտորները համապատասխանում են ամենաանհարթ հաջորդականություններին, որոնք ինչպես գիտենք, գեներացնող են հանդիսանում հիպերգրաֆային հաջորդականությունների ամբողջ տիրույթի համար: Կառուցվում է $P(n, 3)$–ի շղթաների տրոհման ալգորիթմ, որն էլ կարելի է օգտագործել այնտեղ որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի ճանաչման համար:

Դիցուք՝ $[n] = \{1,2, \cdots, n\}$, և $P(n, 3)$-ը $[n]$-ի 3-ենթաբազմությունների բազմությունն է: $P(n, 3)$-ում սահմանվում է մասնակի կարգ՝ կոորդինատ-առ-կոորդինատ համեմատման կարգը; և $(a_1, a_2, a_3) \in P(n, 3)$ էլեմենտի ռանգը՝ $r(a_1, a_2, a_3) = a_1 + a_2 + a_3$: Նախ դուրս են բերվում $P(n, 3)$-ի որոշ հատկություններ՝ սիմետրիա միջին շերտի/շերտերի նկատմամբ, կառուցվածքի տրոհում, քանակներ: Այնուհետև կառուցվում է շղթաների տրոհման $CHAIN\_SPLIT(CHS)$ ալգորիթմը՝ հաշվի առնելով, որ բավական է շղթաները կառուցել միայն $\hat{P}(n, 3)$-ում (միջին շերտից վերև ընկած մասում) կամ միայն $\check{P}(n, 3)$-ում (միջին շերտից ներքև ընկած մասում), և շարունակել ըստ սիմետրիայի:

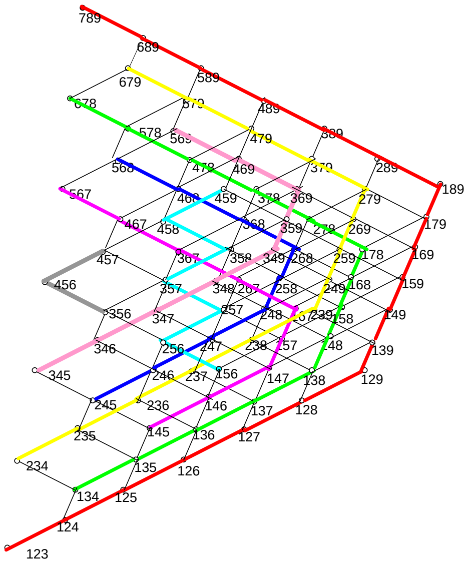
Ալգորիթմ CHS: ($P(n, 3)$-ի տրոհումը շղթաների)

1. $P(n,3)$-ի շերտերում էլեմենտները դասավորել ըստ լեքսիկոգրաֆիկ կարգի;

2. Կառուցել շղթաները $\check{P}(n,3)$-ի մասում: Ընդհանուր առմամբ, յուրաքանչյուր ընթացիկ շղթա սկսվում է ստորին շերտի (քանի դեռ այն պարունակում էլեմենտ, որը դեռևս ոչ մի շղթայի մեջ չէ) ամենափոքր համարով էլեմենտից (որը դեռևս ոչ մի շղթայի մեջ չի մտել), և բարձրանում է վերև՝ մինչև հասնի միջին շերտին կամ՝ փակուղի:

3. Աճեցնել շղթաների $\check{P}(n,3)$- ին պատկանող մասը դեպի $\hat{P}(n,3)$:

Նկար 5.3.2-1–ում պատկերված է $P(9,3)$-ի տրոհումը ըստ Ալգորիթմ CHS –ի:



Նկար 5.3.2-1: $P(9,3)$-ի տրոհումը շղթաների:

<u>Ատենախոսության հիմնական արդյունքները</u>

1. Տրվել է n գագաթով և m կողով պարզ հիպերգրաֆների աստիճանային հաջորդականությունների բազմության ամբողջական նկարագիրը բազմարժեք բազմաչափ Ξ_{m+1}^{n} ցանցի ենթաբազմության տեսքով՝ եզրային էլեմենտների և նրանցով ծնվող մոնոտոն տիրույթների տերմիններով, որտեղ եզրային էլեմենտները գեներացվում են մոնոտոն Բուլյան ֆունկցիաների միջոցով [7], [8], [13]: Դուրս են բերվել տիրույթի կարևոր կառուցվածքային առանձնահատկություններ [9], [14], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [29].
   - գտնվել են մինիմալ կշռով եզրային էլեմենտները՝ նրանք համապատասխանում են միավոր E^n խորանարդի բառարանային սեղմված m-ենթաբազմությանը և միակն են կոորդինատների տեղափոխությունների ճշտությամբ;

- մաքսիմալ կշռով էլեմենտները համապատասխանում են E^n-ի $\tilde{1}$ կենտրոնով գնդածև m-ենթաբազմություններին; նրանց բնութագրման խնդիրը համարժեք է հիպերգրաֆային հաջորդականությունների խնդրին՝ համասեռ հիպերգրաֆների դեպքում;
- գտնվել են $\bar{r}_{min}$ և r_{max} շեմեր այնպես, որ $\bar{r}_{min}$-ից փոքր կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային են, և r_{max}-ից մեծ կշռով հաջորդականությունները հիպերգրաֆային չեն;
- գտնվել է անհրաժեշտ և բավարար պայման ըստ տրված աստիճանային հաջորդականության պարզ ռեգուլյար հիպերգրաֆի գոյության համար:

Նշված արդյունքների ձեռքբերումը մասնակիորեն հիմնված է Ξ_{m+1}^n ցանցի խորանարդատիպ տրոհման մեթոդի վրա, ինչը ստացել է նաև այլ կարևոր կիրառություններ [11], [15], [28], [31]:

2. Մշակվել է սյուների տրված կշիռներ (աստիճանային հաջորդականություն) և տարբեր տողեր ունեցող բինար մատրիցի (պարզ հիպերգրաֆ) սյուն-առ-սյուն կառուցման G արդյունավետ ալգորիթմ [1], [10], [12], [16], [17], [18], [19], [23], [30].
   - ապացուցվել է, որ ալգորիթմի լոկալ քայլում հերթական սյան կառուցումը օպտիմալ է՝ որպես նպատակային ֆունկցիա դիտարկելով մատրիցի տարբեր տողերի զույգերի քանակը (որի օպտիմալ արժեքը ապահովում է տողերի տարբեր լինելը);
   - տրվել է ալգորիթմի արդյունքի երաշխիքի տեսական գնահատական սյուների կշիռներով արտահայտվող պարզ բանաձևի տեսքով:
3. Մշակվել է բազմարժեք բազմաչափ Ξ_{m+1}^n ցանցում որոշված մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման նոր մեթոդ՝ հիմնած բազմարժեք բազմաչափ ցանցի խորանարդատիպ տրոհման վրա [11], [28], [31].
   - կառուցվել են մոնոտոն բինար ֆունկցիայի վերծանման CS ($CS1$, $CS2$) ալգորիթմներ՝ ներկայացված օպտիմալ բինար վերծանիչների չհատվող բազմությունների տեսքով;
   - դուրս է բերվել ալգորիթմների բարդության գնահատական-բանաձև:
4. Ստացված արդյունքները նոր կիրառական համակարգերի նախագծման հիմք են հանդիսացել.
   - G ալգորիթմը կիրառվել է գումարային բալանսով բինար ծառի մոդել կառուցելու համար պատկերների ըստ գրաֆիկական բնութագրերի դասակարգման խնդրում, մասնավորապես, հայերեն տպատառ տեքստերի ավտոմատ ճանաչման “Armenian Reader” համակարգում [2], [3], [4], [6];
   - CS ալգորիթմը նոր գործիք է տրամադրում քանակական ասոցիատիվ կանոնների (հաճախ հանդիպող հավաքների բազմության) դուրսբերման համար մոնոտոն ատրիբուտներով տվյալների դեպքում [31], ինչն իր հերթին ընդլայնում է հոսքային տվյալների պեղման հնարավորությունները, ինչպես օրինակ, LOG ֆայլերի վերլուծումը ցանցերի ներխուժման հայտնաբերման SPARTA համակարգում է (Data Analysis Module) [5], [20];

Նշված ալգորիթմները թույլ են տալիս զուգահեռ իրականացում, ինչն էական է տվյալների պեղման մեծածավալ խնդիրների լուծման համար:

Ատենախոսության թեմայով հրատարակված աշխատանքները

1. Саакян А.А., Об одном классе (0,1)-матриц, связанных с разбиениями подмножеств E^n. Доклады НАН Армении, Том 97, 2, 1997, стр. 12-16.
2. Aslanyan L, Manoucherians J., Sahakian H., Hierarchical recognition technologies for graphical primiteves, Proceedings of CSIT 1997, Yerevan, 1997, pp. 137-140.
3. Aslanyan L., Sahakyan H., System for recognizing printed Armenian texts, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 9, No. 1, 1999, pp. 17-18.
4. Aslanyan L, Sahakyan H., "Armenian Reader" – an OCR system for Armenian printed texts, Proceedings of CSIT 1999, Yerevan, 1999, pp. 269-273.
5. Aslanyan L., Margaryan K., Sahakyan H., Data analysis algorithms in network protection systems, The Third International Conference "Digital Information Processing and Control in Extreme Situations", Minsk, 2002, ISBN: 985-6453-80-1, pp. 221-225.
6. Aslanyan L., Sahakyan H., Differential balanced trees and (0,1)-matrices, "Information Theories and Applications", Volume 10, Number 4, 2003, pp. 363-369.
7. Sahakyan H., Aslanyan L., The boundary descriptors of the n-dimensional unit cube subset partitioning, "Information Theories and Applications", Volume 13, Number 3, 2006, pp. 209-215.
8. Aslanyan L., Sahakyan H., Numerical characterization of n-cube subset partitioning, "Electronic Notes in Discrete Mathematics", Volume 27, pp. 3-4/110, October 2006, Elsevier B.V.,ODSA 2006 - Conference on Optimal Discrete Structures and algorithms.
9. Sahakyan H., Description reduction for restricted sets of (0,1) matrices, "Information Theories and Applications", Volume 14, Number 4, 2007, pp. 311-315.
10. Aslanyan L., Sahakyan H., Hovsepyan A., Սահմանափակ ուռուցիկության տոմոգրաֆիա և լագրանժյան մոտարկումների մասին, "Mathematical Problems of Computer Science", Volume 30, 2008, pp.111-122.
11. Sahakyan H., Aslanyan L., On structural resource of monotone recognition, "Information Theories and Applications", Volume 15, Number 3, 2008, pp. 285-289.
12. Sahakyan H., Aslanyan L., Lagrangean approximation for combinatorial inverse problems, "Algorithmic and Mathematical Foundations of Artificial Intelligence", Volume 2, Number 1, 2008, pp. 14-20.
13. Sahakyan H., Numerical characterization of n-cube subset partitioning, "Discrete Applied Mathematics", Volume 157, 2009, pp. 2191-2197.
14. Sahakyan H., Aslanyan L., Generating more boundary elements of subset projections, Intenational Book Series "Information Science and Computing", Book 9 "Intelligent Processing", 2009, pp. 139-144.
15. Sahakyan H., Aslanyan L., Chain split of partial ordered set of k-subsets, "New Trends in Information Technologies", 2010, pp. 55-65.
16. Sahakyan H., Aslanyan L., Linear program form for ray different discrete tomography, "Information Technologies and Knowledge", Volume 4, Number 1, 2010, pp. 41-50.

17. Sahakyan H., Approximation greedy algorithm for reconstructing of (0.1)-matrices with different rows, “Information Theories and Applications”, Volume 17, Number 2, 2010, pp. 124-137.
18. Aslanyan L., Hovsepyan A., Sahakyan H., Constraint convexity tomography and Lagrangian approximations, “Information Theories and Applications”, Volume 17, Number 3, 2010, pp. 203-212.
19. Sahakyan H., Aslanyan L., Evaluation of greedy algorithm of constructing (0,1)-matrices with different rows, “Information Technologies and Knowledge”, Volume 5, Number 1, 2011, pp. 55-66.
20. Aslanyan L., Bojilov V., Burak P., Ivanova N., Korobulina O., Krissilov A., Markov K., Milenov K., Milenov P., Milenova L., Radkov R., Sahakyan H., Shutko A., Intelligent Data Processing in Global Monitoring for Environment and Security, Chapter 1 “Managing risk and safety”, ITHEA, Sofia (Bulgaria) and Kiev (Ukraine), 410 p., 2011.
21. Sahakyan H., Aslanyan L., On hypergraph degree sequence characterization, “Mathematical Problems of Computer Science”, Volume 38, 2012, pp.89-90. International Conference Mathematical Logic and Applications dedicated to the 80th Anniversary of Igor Zaslavski, 1-3 November, 2012, Yerevan, Armenia.
22. Sahakyan H., (0,1)-matrices with different rows, CSIT 2013 Revised Selected Papers, IEEE conference proceedings, 7 p., DOI: 10.1109/CSITechnol.2013.6710342.
23. Sahakyan H., Constrained object-characterization tables and algorithms, "Information Content and Processing", Volume 1, Number 2, 2014, pp.136-144.
24. Sahakyan H., Essential points of the n-cube subset partitioning characterization, “Discrete Applied Mathematics”, Volume 163, part 2, 2014, pp. 205-213.
25. Sahakyan H., On the set of simple hypergraph degree sequences, “Applied Mathematical Sciences”, Volume 9, Number 5, 2015, pp. 243-253.
26. Aslanyan L., Gronau H.-D., Sahakyan H., Wagner P., Constraint satisfaction problems on specific subsets of the n-dimensional unit cube, CSIT 2015 Revised Selected Papers, IEEE conference proceedings, pp. 47-52, DOI:10.1109/CSITechnol.2015.7358249.
27. Sahakyan H., Aslanyan L., Convexity related issues for the set of hypergraphic sequences, “Information Theories and Applications”, Volume 23, Number 1, 2016, pp.39-47.
28. Aslanyan L., Sahakyan H., Splitting technique in monotone recognition, “Discrete Applied Mathematics”, Volume 216 Issue P3, 2017, pp. 502-512.
29. Arsenyan I., Aslanyan L., Sahakyan H., Randomized set systems constrained by the Discrete Tomography, “Information Theories and Applications”, Volume 23, Number 3, 2016, pp.203-231.
30. Sahakyan H.A., Hypergraph degree sequence approximation, “NAS RA Reports”, Volume 117, Number 1, 2017, pp.26-34.
31. Aslanyan L., Sahakyan H., Cube-split technique in quantitative association rule mining, “Information Theories and Applications”, Volume 24, N3, 2017, pp. 3-20.

Hasmik A. Sahakyan

Existence, construction and description of structures given by partial characterization in discrete models

ABSTRACT

This work is about the studies of mathematical problems of discrete modeling. The discrete models, in which only certain partial characteristics of a given object are known, are connected to the problems of existence, construction and description of objects by the given characteristics. They arise in different scientific domains and application problems, such as network modeling, design of experiments, image recognition, and many others. This work considers still unsolved problems of the domain with the terms of hypergraphs, discrete tomography, multi-dimensional multi-valued grid, and binary trees, which, on the one hand, are of theoretical importance, and on the other — are part of different applications.

The research is carried out in the following main directions:

- Studies of projection and neighborhood type mappings in discrete modeling in the form of existence, construction and description problems of hypergraphs, by the given degree sequence. This is one of the well-known and open problems of the hypergraphic field and, thus, stands as a major theoretical target, and its applications include: generation of transport networks, document-intensive web information systems, and others. The main purpose of this part is to obtain a precise description of the set of hypergraphic sequences, — which is presented and analyzed in this work for the first time.
- Research in the field of discrete tomography, where the main purpose is to include new constraints into the domain, in the form of strip-based projections and non-repeatative elements. These are the constraints, that appear in different application problems and models, reflecting the conditions of generalized degree sequences and the simplicity property of the hypergraphs. In this part of the work important achievements are the efficient approximate algorithms of the discrete tomography problems.
- Study of discrete modeling tools and algorithms. The cube-split technique and summarized hierarchies concept are introduced in this work, which serve as a basis for additional applications. A general description of the work can be summarized as follows:

Models	• Discrete mathematical models with projection and neighborhood type mappings: - Set systems/ Multi-dimensional binary cube - Discrete tomography/ Binary matrices - Cube-split model/ Multi-dimensional multi-valued grid
Problems	• Description of hypergraphic degree sequences • Discrete tomography problems with new constraints • Identification of discrete monotone binary function • Image classification by the given graphical characteristics • Quantitative rule mining algorithms
Applications	• Transportation and communication networks with constraints/ network generation • Experiments design in resource constraint biological applications • Optical character recognition • Network intrusion detection

The main results are:

1. The complete description of the set of the degree sequences of simple hypergraphs with n nodes and m edges in a form of a subset of integral grid Ξ_{m+1}^{n} in terms of boundary elements and their convexity closures is obtained, where the boundary elements are generated by monotone Boolean functions [7], [8], [13]. Significant structural features are obtained [9], [14], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [29], including:
   - the boundary elements of the minimal weight corresponding to the m-length initial segments of the colex ordering of E^n are found which are unique up to coordinate permutations;
   - the boundary elements of the maximal weight correspond to the spheric m-subsets of E^n, centred at $\tilde{1}$; the problem of characterization of those elements is equivalent to the degree sequence problem for uniform hypergraphs;
   - thresholds $\bar{r}_{min}$, r_{max} such that all sequences with rank less than $\bar{r}_{min}$ are hypergraphic, and all sequences with rank greater than r_{max} are not hypergraphic are found;
   - necessary and sufficient condition for existence of simple regular hypergraph with the given degree sequence are found.

   Obtaining of the mentioned results is partially based on the medhod of cube-type spliting of the grid Ξ_{m+1}^{n} [11], [15], [28], [31].
2. An effective algorithm G for column-by-column constructioning of tomography matrices with the given column weights and with all different rows is developed [1], [10], [12], [16], [17], [18], [19], [23], [30]:
   - it is proven that the each column construction in local step of the algorithm is optimal, when the objective function is defined as the number of pairs of differing rows /the optimal value of which provides the differentity of the rows/;
   - a theoretical estimate of the guarantee of the algorithm result is achieved in the form of a simple formula (given by the column weighs);
3. A new method of recognition of monotone binary functions defined in the multi-valued multidimantional grid Ξ_{m+1}^{n}, based on the cube-split technique of Ξ_{m+1}^{n}, is developed [11], [28], [31]:
   - recognition algorithms CS ($CS1$, $CS2$) in form of disjoint sets of optimal binary recognizers are constructed;
   - the estimate-formula of the complexity of algorithms is obtained.
4. The obtained results serve as a basis for the design of new application related systems:
   - an algorithm G for constructing a summary balanced binary tree model in the problem of classification of images by graphic characteristics is used, in particular, in the system for automatic recognition of Armenian texts “Armenian Reader” [2], [3], [4], [6];
   - an algorithm CS provides a new tool for obtaining quantitative association rules (the set of frequent patterns) for the case of data with monotone attributes [31], which, in its turn, extpands possibilities for mining of streaming data, such as the LOG file analysis in network intrusion detection system (SPARTA Data Analysis Module) [5], [20].

The mentioned algorithms allow parallel implementation, which is essential in data mining large-scale problems.

Асмик А. Саакян

Существование, построение и описание структур, заданных в частичной характеризации в дискретных моделях

РЕЗЮМЕ

Работа посвящена изучению математических задач дискретного моделирования. Дискретные модели, в которых известны частичные характеристики данного объекта, связаны с задачами существования, построения и описания объектов с данными характеристиками. Они возникают в разных научных областях и приложениях, таких как моделирование сетей, дизайн экспериментов, распознавание образов и многие другие. В работе рассматриваются нерешенные задачи в терминах гиперграфов, дискретной томографии, многомерной многозначной решетки и бинарных деревьев, которые, имеют теоретическую значимость и являются неотъемлемой частью различных приложений. Исследования проводились по следующим основным направлениям:

➢ Изучение проекционных и окрестностных отображений в задачах дискретного моделирования в терминах существования, построения и описания гиперграфов по заданной последовательности степеней вершин. Это одна из хорошо известных и открытых задач в области гиперграфических моделей и, поэтому, является важной теоретической мишенью; приложениями являются задачи генерации транспортных сетей, документо–интенсивные информационные системы и т. д. Основной целью является получение точного описания множества всех гиперграфических последовательностей, которое впервые получено и проанализировано в этой работе.

➢ Исследования в области дискретной томографии, где основной целью является привлечение новых ограничений в область задачи в виде полосовых проекций, и в виде не повторяемости элементов. Это те ограничения, которые возникают в разных прикладных задачах отражая условия обобщенных степенных последовательностей и простоты гиперграфов. В этой части работы важными достижениями являются эффективные приближенные алгоритмы задач дискретной томографии.

➢ Изучение инструментов дискретного моделирования. В работе введены методы кубического разбиения и иерархий суммарного баланса, которые служат основой для дополнительных приложений. Общее описание работы:

Модели	• Дискретные модели с проекционными и окрестностными отображениями: - Системы множеств/ Многомерный единичный куб - Дискретная томография/ Бинарные матрицы - Модель кубического разбиения/ Многомерная многозначная решетка
Задачи	• Характеризация степенных последовательностей гиперграфов • Задачи дискретной томографии с новыми ограничениями • Распознавание монотонных бинарных функций • Классификация изображений по графическим характеристикам • Нахождение количественных ассоциативных правил
Приложения	• Транспортные и коммуникационные сети с ограничениями/Генеарция сетей • Проектирование экспериментов в биологических приложениях • Распознавание печатных букв • Обнаружение сетевых вторжений

Основные результаты:

1. Получено полное описание множества всех гиперграфических последовательностей простых гиперграфов с n узлами и m ребрами в виде подмножества решетки Ξ_{m+1}^{n}, в терминах граничных элементов, где граничные элементы генерируются обычными монотонными булевыми функциями n переменных [7], [8], [13]. Получены важные структурные характеристики [9], [14], [21], [22], [24], [25], [26], [27], [29], в том числе:

- найдены граничные элементы минимального веса; доказано, что они соответствуют начальным отрезкам длины m обратного лексикографического упорядочения вершин бинарного куба E^n, и что они единственны с точностью до перестановки координат;
- граничные элементы максимального веса соответствуют m–сферическим подмножествам E^n с центром $\tilde{1}$; задача их описания эквивалентна задаче описания гиперграфических последовательностей для однородных гиперграфов;
- найдены пороги $\bar{r}_{min}$ и r_{max} , такие что все последовательности ранга меньший, чем $\bar{r}_{min}$, - являются гиперграфическими, и все последовательности с рангом, больше чем r_{max} , - не гиперграфические;
- найдено необходимое и достаточное условие существования простого регулярного гиперграфа по заданной последовательностью степеней вершин.

Получение указанных результатов частично основано на методе кубического разбиения решетки Ξ_{m+1}^{n} [11], [15], [28], [31].

2. Разработан эффективный алгоритм G построения бинарных матриц с заданными весами столбцов и отличающимися строками [1], [10], [12], [16], [17], [18], [19], [23], [30]:

- доказано, что построение очередного столбца матрицы в локальном шаге алгоритма оптимально при рассмотрении в качестве целевой функции числа пар разных строк /оптимальное значение обеспечивает существование матрицы/;
- получена простая, в терминах весов столбцов, формула гарантированного результата работы алгоритма;

3. Разработан новый метод расшифровки монотонной бинарной функции определенной на Ξ_{m+1}^{n}, основанный на кубических разбиениях решеток [11], [28], [31]:

- построен алгоритм CS распознавания монотонных бинарных функций, представленный в виде системы непересекающихся множеств бинарных распознавателей;
- получена оценка-формула сложности алгоритма.

4. Полученные результаты инициировали проектирование новых прикладных систем:

- алгоритм G был применен для разработки модели бинарного дерева в задачах классификации изображений, в частности, в системе автоматического распознавания армянских текстов «Armenian Reader» [2], [3], [4], [6];
- алгоритм CS предоставляет новый инструмент для обобщенной модели раскопки количественных ассоциативных правил (частых фрагментов) в случае монотонных атрибутов [31], что расширяет возможности раскопки потоковых данных, например, решение проблемы обнаружения сетевого вторжения при помощи анализа LOG файлов (модуль анализа данных SPARTA) [5], [20].

Алгоритмы позволяют параллельную реализацию, что является важным свойством при рассмотрении задач раскопки данных больших размеров.