

ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱՅԻ ԵՎ ԱՎՏՈՄԱՏԱՑՄԱՆ ՊՐՈԲԼԵՄՆԵՐԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ՊՈՂՈՍՅԱՆ ՎԱՀԱԳՆ ՍՈՒՐԵՆԻ

**ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՎՈՂ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇԻՌ ՑԱՆՑԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐ,
ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐ և ԻՆՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՏԱՐԱԾՄԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐ
ԻՆՔՆԱԿԱԶՄԱԿԵՐՊՎՈՂ ԲԱԶՄԱԱԳԵՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ**

Ե13.05 – «Մաթեմատիկական մոդելավորում, թվային մեթոդներ և ծրագրերի
համալիրներ» մասնագիտությամբ տեխնիկական
գիտությունների դոկտորի գիտական աստիճանի հայցման
ատենախոսություն գիտական զեկույցի ձևով

Երևան – 2026

INSTITUTE FOR INFORMATICS AND AUTOMATION PROBLEMS

POGHOSYAN VAHAGN S.

**EXACTLY SOLVABLE NON-EQUILIBRIUM LATTICE MODELS, ALGORITHMS, AND
SCHEMES FOR OPTIMAL INFORMATION DISSEMINATION IN SELF-ORGANIZING
MULTI-AGENT SYSTEMS**

Thesis in the form of a scientific report
submitted for obtaining doctoral degree in technical sciences in specialty
05.13.05 “Mathematical modeling, numerical methods and program complexes”

Yerevan – 2026

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում

Գիտական խորհրդատու՝

ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, տեխ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Շուքուրյան Յուրի Հայկի

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ, ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Ասլանյան Լևոն Հակոբի ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Անանիկյան Ներսես Սիրեկանի

ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոս, տեխ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր Խաչատրյան Գուրգեն Հայկի

Առաջատար կազմակերպություն՝ Երևանի Կապի Միջոցների ԳՀԻ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2026թ. հոկտեմբերի 15-ին, ժամը 14:00-ին Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում գործող 037 «Ինֆորմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ Երևան, 0014, Պ. Սևակի 1:

Գիտական զեկուցմանը կարելի է ծանոթանալ ԻԱՊԻ գրադարանում: Գիտական զեկուցումն առաքված է 2026թ. սեպտեմբերի 14-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական

քարտուղար, ֆիզ.մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  Մ.Ե. Հարությունյան

The subject of the dissertation has been approved in Institute for Informatics and Automation Problems of NAS RA

Scientific adviser:

Academician of NAS RA, Doctor of Tech. Sciences, Professor Yu.H. Shoukourian

Official opponents:

Corresponding Member of NAS RA, Doctor of Phys. Math. Sciences, Professor L.H. Aslanyan

Doctor of Phys. Math. Sciences, Professor N.S. Ananikian

Academician of NAS RA, Doctor of Tech. Sciences, Professor G.H. Khachatryan

Leading organization: Yerevan Telecommunication Research Institute

The defense will take place on 14 October 2026 at 14:00 in the Institute for Informatics and Automation Problems, during the session of the specialized council 037 “Informatics”, at the following address: 1 P. Sevak St., 0014, Yerevan, Armenia.

The scientific report is available at the library of the Institute for Informatics and Automation Problems. The scientific report was sent out on 14 September 2026.

Scientific secretary of the specialized council

Doctor of Phys. Math. Sciences, Professor



M.E. Harutyunyan

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ	4
Ատենախոսության նպատակը.....	5
1. ԻՆՔՆԱԿԱԶՄԱԿԵՐՊՎԱԾ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ԴԵԳԵՐՄԱՆ ԵՎ ԱՅԼ ՑԱՆՑԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ	5
1.1. Արդի վիճակի վերլուծություն.....	5
1.2. Հիմնական արդյունքները.....	14
2. ԻՆՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՓՈԽԱՆԱԿՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԵՎ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ	21
2.1. Արդի վիճակի վերլուծություն.....	21
2.2. Հիմնական արդյունքները.....	25
3. ԹՎԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ, ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԵՎ ԻՆՔՆԱԿԱՐ ԱԹՍ-ՆԵՐԻ ԻՆՔՆԱԿԱԶՄԱԿԵՐՊՎՈՂ ԱՊԱԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԵՐԱՄՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄ	29
3.1. Արդի վիճակի վերլուծություն.....	30
3.2. Ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների նախագծման հիմքում ընկած մաթեմատիկական մոդելները	32
3.3. ԱԹՍ-ների երամի համակարգման և առաջադրանքների կատարման հարթակ.....	40
3.4. Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում ստացված կիրառական արդյունքները.....	48
3.5. Կիրառված թվային մոդելավորման մեթոդներ և մշակված հաշվարկային ալգորիթմներ.....	53
ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ.....	55
ՕԳՏԱԳՈՐԾՎԱԾ ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿԸ.....	59
ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ԹԵՄԱՅՈՎ ՀԵՂԻՆԱԿԻ ՀՐԱՊԱՐԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՑԱՆԿԸ.....	80

ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Ճշգրիտ լուծվող ցանցային մոդելների ուսումնասիրությունը առանցքային դեր է խաղում հավասարակշիռ և անհավասարակշիռ վիճակագրական մեխանիկայի տեսության զարգացման մեջ: Այդ մոդելները սովորաբար սահմանվում են համեմատաբար պարզ դինամիկական կանոնների միջոցով և միևնույն ժամանակ հաճախ հանգեցնում են դիտարկելի ֆիզիկական մեծությունների ոչ տրիվիալ կրիտիկական վարքին: Նման մոդելների ուսումնասիրությունը թույլ է տալիս պարզ օրինակների վրա հասկանալ և բացատրել իրական համակարգերի կրիտիկական վարքի մեխանիզմը՝ թե՛ թերմոդինամիկական հավասարակշռության, թե՛ դրանից դուրս պայմաններում:

Միևնույն ժամանակ, վերջին տասնամյակներում թվային մեթոդների, կիրառական մաթեմատիկայի և համակարգչային գիտության արագ զարգացումը արմատապես ընդլայնել է նման մոդելների հետազոտման հնարավորությունները: Գերհամակարգիչների վրա բարձր արդյունավետությամբ հաշվարկների, մեծածավալ թվային սիմուլյացիաների, զուգահեռ ալգորիթմների և տվյալների մշակման ժամանակակից մեթոդների կիրառումը հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել այնպիսի համակարգեր, որոնց համար ճշգրիտ անալիտիկ լուծումներ հայտնի չեն կամ գործնականում անհասանելի են: Թվային մոդելավորումը կարևոր գործիք է դարձել ոչ միայն անալիտիկ արդյունքների ստուգման և դրանց կիրառելիության սահմանների գնահատման համար, այլև նոր օրինաչափությունների բացահայտման և նոր հիպոթեզների ձևակերպման գործում:

Բացի այդ, նման հետազոտությունները կարևոր ազդեցություն ունեն նաև համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի զարգացման վրա՝ խթանելով նոր ալգորիթմների, հաշվողական մեթոդների, Մոնտե Կառլոյի մեթոդների, զուգահեռ և բաշխված հաշվարկների համար հարթակների, ինչպես նաև բարդ բազմաազենտային համակարգերի մոդելավորման արդյունավետ միջոցների ստեղծումը:

Այսպիսով, ճշգրիտ և թվային մեթոդների համադրությունը ձևավորում է ժամանակակից միջդիսցիպլինար հետազոտությունների կարևոր ուղղություն, որը միավորում է տեսական ֆիզիկան, կիրառական մաթեմատիկան և համակարգչային գիտությունը:

Ատենախոսության նպատակը

Ատենախոսության նպատակն է ուսումնասիրել վիճակագրական մեխանիկայի մի շարք ճշգրիտ լուծվող ցանցային մոդելների մաթեմատիկական հատկությունները, ինքնակազմակերպված կրիտիկականության, քվադրատահական դեգերման և ինֆորմացիայի տարածման պրոցեսների օրինաչափությունները, ինչպես նաև ստացված տեսական արդյունքների հիման վրա մշակել և իրականացնել բազմաազենտային համակարգ հանդիսացող ինքնավար անօդաչու թռչող սարքերի (ԱԹՍ) ապակենտրոնացված ինքնակազմակերպվող երամի կառավարման և տարածքի մոլտիէլյերյան ծածկույթի ալգորիթմներ ու ծրագրային հարթակներ:

Թեմայի արդիականությունը, գիտական նորույթը և ստացված հիմնական արդյունքները շարադրված են ատենախոսության առաջին և երկրորդ բաժիններում: Ստացված արդյունքների կիրառական նշանակությունը և դրանց ներդրումները նկարագրված են երրորդ բաժնում, որտեղ ներկայացված են հետազոտությունների շրջանակներում ստեղծված թվային հաշվարկների ու մոդելավորման ծրագրային փաթեթները, ինչպես նաև ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների համար մշակված ալգորիթմներն ու ծրագրային ապահովման ամպային ցանցային հարթակները:

Ատենախոսության եզրակացություն բաժնում ամփոփված են պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները: Ատենախոսության վերջում ներկայացված են աշխատանքի արդյունքների զեկուցումները, իրականացված գիտական ծրագրերը, օգտագործված գրականության ցանկը և ատենախոսության թեմայով հեղինակի հրապարակումների ցանկը:

1. ԻՆՔՆԱԿԱԶՄԱԿԵՐՊՎԱԾ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ, ԴԵԳԵՐՄԱՆ ԵՎ ԱՅԼ ՑԱՆՑԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄ

1.1. Արդի վիճակի վերլուծություն

Վիճակագրական մեխանիկայում թերմոդինամիկական հավասարակշռության մեջ գտնվող համակարգերի ամենակարևոր ցանցային մոդելներից մեկը Իզինգի մոդելն է [1] - [2], որը սկզբնապես ներմուծվել է ֆերոմագնիսների կրիտիկական հատկությունները Կյուրիի կետում նկարագրելու համար: Երկչափ քառակուսային ցանցի վրա Իզինգի մոդելը առաջին անգամ լուծվել է ճշգրիտ՝ Օնզագերի կողմից [3]: Այս մոդելի ճշգրիտ լուծումը ցույց է տալիս, թե ինչպես կարող է կարճ հեռահարության (լոկալ) փոխազդեցությամբ մասնիկների համակարգում առաջանալ երկրորդ կարգի փուլային անցում: Պարզվում է, որ այս կրիտիկական երևույթի հիմնական բնութագրիչները (կրիտիկական ինդեքսները) սկզբունքորեն տարբերվում են այն արդյունքներից, որոնք ստացվում են մոտավոր անալիտիկ հաշվարկներով (խոտորումների տեսություն, ռենդոմիսմբի մեթոդ, միջին դաշտի տեսություն և այլն):

Երկչափ Իզինգի մոդելի հատկությունների լիարժեք ուսումնասիրությունից հետո Ի հայտ եկան այլ ցանցային մոդելներ, օրինակ՝ գազաթային մոդելները և սպինային մոդելների տարբեր ընդհանրացումներ: Այդպիսի ընդհանրացում է սպինի Չ վիճակներով Փոթսի մոդելը [4], որը նույնպես կարևոր դեր ունի վիճակագրական մեխանիկայում: Նրա առանձնահատկությունն այն է, որ Չ պարամետրից կախված փոխվում է փուլային անցման տեսակը: Երկչափ ցանցի վրա Փոթսի մոդելը հաջողվել է ճշգրիտ լուծել միայն պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում: Երկչափ մոդելների ճշգրիտ լուծման տարբեր մեթոդների համակարգված ներկայացմանը և ուսումնասիրությանը նվիրված են բազմաթիվ գրքեր և ակնարկային աշխատություններ [5] - [7] (տես նաև այնտեղ բերված հղումները):

Հետաքրքրություն են նաև ներկայացնում ճշգրիտ լուծվող սպինային քվանտային և տրամաչափային մոդելները, դրանց միմյանց հետ կապերը, տոպոլոգիական հատկությունները, ինչպես նաև այդ մոդելներում առաջացող կրիտիկական և տրիկրիտիկական երևույթները [10] - [14]:

Բացի ընդհանրացված մոդելների առաջացումից, հայտնվեցին նաև Իզինգի մոդելի լուծման այլընտրանքային եղանակներ [8] - [15]: Մոդելի ձևակերպումը պֆաֆիանների լեզվով տրվել է Հյուրսթի և Գրինի կողմից [16], որը հետագայում Կաստելեյնը ներկայացրել է դայմերների լեզվով [17] - [18]: Դայմերների (կամ դոմինոների) մոդելը ներմուծվել է 1937 թ. Ֆաուլերի և Ռաշբորոֆի կողմից [19], սակայն առաջին ճշգրիտ արդյունքները շատ ավելի ուշ՝ անցյալ դարի վաթսունական թվականներին են ստացել Կաստելեյնը, Ֆիշերը, Թեմփերլին և Ստիվենսոնը [20] - [23]:

Ժամանակի ընթացքում դայմերների մոդելը զարգացել է և մանրամասն ուսումնասիրվել բազմաթիվ աշխատություններում [24] - [27] (տես նաև այնտեղ բերված հղումները): Խիտ դասավորմամբ դայմերների և քառակուսային ցանցի վրա ծածկող ծառերի միջև համապատասխանությունը հաստատվել է Թեմփերլիի կողմից [20] և տարածվել է կամայական հարթ գրաֆների վրա՝ Բերթոնի և Փեմանթլիի կողմից [28] (տես նաև [29] - [31]): Այս համապատասխանությունը պահպանվում է նաև մոնոմերների առկայության դեպքում [32] - [34] և այդ դեպքում հանգեցնում է ծածկող սարդոստայնների (spanning webs) մոդելների [35]: Թվայնորեն ստացված հավանականությունների սիմվոլային արտահայտությունները գտնելու համար օգտագործվել է Պլուֆի սիմվոլիկ հակադարձման հաշվիչը (Plouffe's Inverter) [36]:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում ներկայացված մեկ մոնոմերով խիտ դասավորված դայմերների մոդելում մոնոմերի շարժունակության անալիտիկ հետազոտության համար հատուկ կերպով կառուցվել են դիսկրետ Լապլասյանի Գրինի ֆունկցիաներ պարունակող Թոփլիցի մատրիցներ: Թոփլիցի մատրիցների դետերմինանտների ասիմպտոտիկական հաշվելու համար օգտագործվել է Սեգյոյի սահմանային թեորեմը [37] - [40]:

Ֆորտույնի և Կաստելեյնի աշխատանքներում [8], [41] ցույց է տրվել, որ մաթեմատիկական ձևակերպման տեսանկյունից տարբերվող մի շարք ցանցային մոդելներ կազմում են գրաֆների տեսության խնդիրների միասնական լայն դաս, որոնք հանդիպում են տեսական ֆիզիկայի, հավանականությունների տեսության և կոմբինատորիկայի տարբեր ոլորտներում: Մասնավորապես, Ֆորտույնը և Կաստելեյնը

սահմանել են պատահական կլաստերների մոդելը, որի վիճակագրական գումարը (հավանականությունների ծնորդ ֆունկցիան) տարբեր պարամետրերի դեպքում վերածվում է Տաթթի բազմանդամի (դիսրոմատիկ բազմանդամի) [42] - [46], ծածկող ծառերի թվարկման խնդրի [31], պերկոլացիայի մոդելի [47] - [49], Փոթսի մոդելի [4], [50] և Աշկին-Թեյլերի մոդելի [6], [50] - [52]: Ծածկող ծառերի հաշվարկը Կիրիսիոֆի թեորեմի օգնությամբ [53], իր հերթին, հնարավորություն է տալիս գտնել բարդ էլեկտրական շղթաների դիմադրությունը, և բարդ անհամասեռ միջավայրերի ջերմահաղորդականությունը:

Հավասարակշիռ թերմոդինամիկական համակարգերի տեսության զարգացմանը զուգընթաց վերջին ժամանակներում առաջացել է հետաքրքրություն ճշգրիտ լուծվող անհավասարակշիռ ցանցային մոդելների ուսումնասիրության նկատմամբ: Թե՛ հավասարակշիռ, թե՛ անհավասարակշիռ համակարգերում առաջանում են կրիտիկական երևույթներ, սակայն անհավասարակշիռ համակարգերի տարբերակիչ հատկությունն այն է, որ կրիտիկական վիճակի հասնելու համար մոդելի պարամետրերի նուրբ կարգավորում (fine tuning) չի պահանջվում: Հավասարակշիռ համակարգերում այդպիսի պարամետրերի դեր են կատարում ջերմաստիճանը և փոխազդեցության էներգիան, իսկ կրիտիկական կետը երկրորդ կարգի փուլային անցման կետն է:

Կրիտիկական վիճակից դուրս համակարգում տարածական երկկետ կորելյացիոն ֆունկցիաները սովորաբար էքսպոնենցիալ կերպով թուլանում են՝ ցանցի հանգույցների միջև հեռավորության աճին զուգընթաց.

$$\mathcal{R} \sim \exp(-r/\xi),$$

որտեղ ξ -ն կոչվում է կորելյացիայի երկարություն: Կրիտիկական կետին մոտենալիս ξ -ն աճելով ձգտում է անվերջության, իսկ հենց կրիտիկական կետում կորելյացիոն ֆունկցիան ունի աստիճանային բնույթ.

$$\mathcal{R} \sim \frac{1}{r^a}.$$

Հավասարակշիռ և անհավասարակշիռ համակարգերի կրիտիկական վարքի ամենակարևոր հատկանիշը, որը բխում է կորելյացիոն ֆունկցիայի աստիճանային վարքից, դա մասշտաբային ինվարիանտությունն է (scaling invariance), այսինքն՝ խոշոր, ինքնանման ֆուլկտուացիաները և բնորոշ մասշտաբի բացակայությունը (անսահման կորելյացիայի երկարություն):

Հավասարակշիռ համակարգերում կրիտիկական ջերմաստիճանից ցածր պայմաններում առաջանում է սպոնտան կարգ (օրինակ՝ ֆերոմագնիսներում դիտվում է սպոնտան մագնիսացում), որը պայմանավորված չէ արտաքին պարտադրող ազդեցությամբ, այլ հանդիսանում է ներքին ոչ տրիվիալ դինամիկայի արդյունք:

Պարզվում է, որ անհավասարակշիռ համակարգերում, որոնք դինամիկայի ընթացքում ինքնաբերաբար հասնում են կրիտիկական վիճակի, կարող է առաջանալ կարգի հատուկ տեսակ: Բանն այն է, որ անհավասարակշիռ համակարգի ընթացիկ վիճակը ժամանակի ընթացքում ընկնում է բոլոր վիճակների որոշ ենթաբազմության մեջ՝ այսպես կոչված ռեկուրենտ վիճակների բազմության մեջ, որից համակարգը երբեք դուրս չի գալիս: Այս հատկությունը դետերմինիստական դինամիկական համակարգերում ատրակտորի գոյության անալոգն է: Ռեկուրենտ վիճակների բազմությամբ շարժման սահմանափակումը առաջացնում է ներքին կարգ: Կարգի և

կրիտիկական հատկությունների (մասշտաբային ինվարիանտ ֆլուկտուացիաների) առաջացման նման մեխանիզմը կոչվում է ինքնակազմակերպված կրիտիկականություն: Սովորաբար ինքնակազմակերպված կրիտիկականության շնորհիվ անհավասարակշիռ համակարգերը ունեն էականորեն ոչ լոկալ հատկություններ, թեև սկզբնապես կարող են նկարագրվել պարզ լոկալ դինամիկական կանոններով: Գոյություն ունի հիպոթեզ, որ ոչ լոկալության այս հատուկ տեսակը կարող է լինել այն բանի պատճառը, որ աստիճանային կորելյացիոն ֆունկցիաների ասիմպտոտիկաներում հայտնվում են լոգարիթմներ.

$$\mathcal{R} \sim \frac{(\log r)^\beta}{r^\alpha}:$$

Ինքնակազմակերպված կրիտիկականության հատկությամբ օժտված անհավասարակշիռ համակարգերի առանձնահատկությունը համակարգի բաց և դիսսիպատիվ լինելն է: Ստացիոնար վիճակում առաջանում են կայուն մակրոսկոպիկ հոսքեր՝ ժամանակից անկախ միջին բնութագրիչներով: Ընդ որում, համակարգը արտաքին աղբյուրից ստացած ամբողջ էներգիան ծախսում է մակրոսկոպիկ հոսքերից առաջացող ներքին շփումը հաղթահարելու վրա: Ի տարբերություն ոչ հավասարակշիռ համակարգերի՝ հավասարակշիռ համակարգերում մակրոսկոպիկ հոսքեր չեն առաջանում, և դիտվում են միայն միկրոսկոպիկ ֆլուկտուացիաներ:

1987 թ. Պ. Բակը, Չ. Թանզը և Կ. Վիզենֆելդը իրենց հայտնի աշխատանքում [54] (տես նաև [55] - [56]) առաջարկեցին ինքնակազմակերպված կրիտիկականության տեսությունը՝ բազմակոմպոնենտ դիսսիպատիվ դինամիկական համակարգերի վարքը բացատրելու համար: Այդ տեսության համաձայն շատ դինամիկական համակարգեր բնական կերպով հասնում են կրիտիկական վիճակի: Այդ վիճակում նույնիսկ փոքր խոտորումը (ֆլուկտուացիան) կարող է առաջացնել շղթայական ռեակցիա, որը անկանխատեսելիորեն կազդի ամբողջ համակարգի կամ նրա զգալի մասի վրա: Ավելին, հավասարակշռություն երբեք չի հաստատվում, իսկ համակարգը էվոլյուցիայի ընթացքում անցնում է մի մետաստաբիլ վիճակից մյուսին:

Արտասահմանյան գրականության մեջ նման շղթայական ռեակցիաները ընդունված է անվանել ընդհանուր մեկ տերմինով՝ *avalanche* (բառացի՝ ձնահոսք, лавина): Թեև *avalanche* տերմինը տարբեր համակարգերում ունի տարբեր ֆիզիկական մեկնաբանություն, բոլոր դեպքերում այն նկարագրում է նույն ընդհանուր մեխանիզմը՝ փոքր լոկալ խոտորումից առաջացող մասշտաբորեն չսահմանափակված շղթայական ռեակցիա:

Թեպետ նման համակարգերում ավելի շատ են փոքր իրադարձությունները, քան աղետները, բոլոր մասշտաբների շղթայական ռեակցիաները դինամիկայի անբաժանելի մասն են: Ավելի ֆորմալ, ինքնակազմակերպված կրիտիկական վիճակում *avalanche*-ների առաջացման հավանականությունը կախված է դրանց չափից՝ *s*-ից աստիճանային օրենքով.

$$P(s) \sim s^{-\tau},$$

որտեղ τ -ն կրիտիկական ցուցիչ է, որը կախված է համակարգի չափողականությունից և մոդելի դասից: Այդպիսի հայտնի համակարգերից են՝

▪ **Երկրաշարժեր**

Այստեղ avalanche տերմինը կիրառվում է սեյսմիկ ակտիվության նկարագրության մեջ՝ որպես լարվածության կուտակման և դրա հանկարծակի ազատման շղթայական ռեակցիա (Գուտենբերգ-Ռիխտերի օրենք): Ավելին, երկրաշարժերի ոչ միայն ուժգնության, այլ նաև էպիկենտրոնների բաշխումը ունի ֆրակտալային պերկոլյացիոն բնույթ [57]:

▪ **Ձնահոսքեր**

Այս դեպքում avalanche-ը ունի բառացի իմաստ. փոքր խոտորումը կարող է հարուցել ձյան զանգվածի արագ և լայնամասշտաբ սահք:

▪ **Սոլանքներ և ժայռաբեկումներ**

Շղթայական փլուզումներ երկրաբանական համակարգերում, որտեղ լոկալ անկայունությունը տարածվում է ամբողջ լանջի վրա:

▪ **Արևի մագնիսական դաշտի փոթորիկներ (solar flares, magnetic storms)**

Մագնիսական վերամիացումը (magnetic reconnection) պլազմայում տեղի ունեցող ֆիզիկական հիմնարար պրոցես է, որի ընթացքում մագնիսական դաշտի ուժագծերի տարածական կառուցվածքը կտրուկ փոխվում է՝ անցնելով էներգետիկորեն ավելի նպաստավոր վիճակի: Դրա արդյունքում կուտակված մագնիսական էներգիան արագ կերպով արտանետվում է՝ վերածվելով մասնիկների կինետիկ էներգիայի և ջերմության: Այդ երևույթի ազդեցությունը կարող է ընդգրկել Արեգակի և արեգակնային համակարգի զգալի հատվածներ:

▪ **Անտառային հրդեհներ**

Հրդեհի տարածումը հաճախ նկարագրվում է որպես շղթայական ռեակցիա, որտեղ լոկալ բռնկումը կարող է ընդգրկել մեծ տարածքներ: Այդ պրոցեսի վիճակագրությունը բնութագրվում է կրիտիկական վարքով:

▪ **Նեյրոնային ցանցեր (neural avalanches)**

Նեյրոնների ակտիվացման շղթայական ալիքներ, որոնց չափերի բաշխումը նույնպես ենթարկվում է աստիճանային օրենքի:

▪ **Ֆինանսական շուկաներ**

Գների կտրուկ տատանումներ կամ փլուզումներ, որոնք մոդելավորվում են որպես շղթայական ռեակցիաներ տեղեկատվական կամ վարքագծային ցանցերում:

Ինքնակազմակերպված կրիտիկականության երևույթի ուսումնասիրմանը և դրա՝ այլ մոդելների ու մաթեմատիկական կառուցվածքների հետ ունեցած կապերի բացահայտմանը, ինչպես նաև կիրառմանն ու ընդհանրացմանը նվիրված են բազմաթիվ աշխատանքներ: Մասնավորապես՝ ինքնակազմակերպվող կրիտիկական

վարք է դիտարկվել նաև «Կյանք» (Game of life) բջջային ավտոմատի տարբերակում [58], անտառային հրդեհների մոդելներում [59] - [60], Զոգեֆսոնի ցանցերում և գրանուլացված գերհաղորդիչներում [61] և այլն: Առաջարկվել են նաև համակարգչային մոդելավորմամբ ուսումնասիրվող այլ մոդելների հսկայական քանակ: Դրանցից են Հվա-Կարդարի մոդելը [62], ավազանման մոդելները (չոր և թաց ավազի մոդելները, բրնձի մոդելը, Մաննայի մոդելը) [64], երկրաշարժերի մոդելները [63], անտառային հրդեհների մոդելները [59] - [60] և շատ այլ մոդելներ:

Ինքնակազմակերպված կրիտիկականության մոտիված համակարգերի պարադիգմ է հանդիսանում ճշգրիտ լուծվող ավազահատիկների (ավազակույտի) աբելյան մոդելը (Abelian sandpile model): Այն բաց ստոխաստիկ դինամիկական համակարգ է, որը կարելի է դիտարկել որպես ոչ գծային դիֆուզիոն պրոցես [54] - [56]: Մոդելը սահմանվում է ինչպես ուղղորդված, այնպես էլ չուղղորդված վերջավոր $G = (V, E)$ գրաֆի վրա՝ նկատի ունենալով, որ ցանկացած չուղղորդված գրաֆ կարելի է վերածել ուղղորդված գրաֆի՝ նրա յուրաքանչյուր կողմ փոխարինելով իրար նկատմամբ հակառակ ուղղված երկու ուղղորդված կողերով: Մասնավորապես, գրաֆի դերում կարող է հանդես գալ վերջավոր երկչափ քառակուսային ցանցը: Տվյալ պահին մոդելի վիճակը (կոնֆիգուրացիան) որոշվում է գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթին վերագրված բարձրության դիսկրետ փոփոխականների բազմությամբ: Եթե բոլոր գագաթների բարձրությունները չեն գերազանցում տվյալ գագաթների համար սահմանված թույլատրելի առավելագույն բարձրությունները $h_{\max}(v)$, $v \in V$, ապա համակարգը կոչվում է կայուն:

Մոդելի դինամիկան նկարագրվում է դիսկրետ ժամանակում բարձրությունների փոփոխության լրկալ դետերմինիստական կանոններով: Ենթադրենք ժամանակի T պահին համակարգը գտնվում է C_T կայուն վիճակում: Պատահական կերպով ընտրվում է ցանցի մի հանգույց և նրա վրա նետվում է մասնիկ, այսինքն՝ տվյալ հանգույցի բարձրությունը ավելանում է մեկով: Եթե համակարգը դառնում է անկայուն, ապա տեղի է ունենում փլուզում՝ անկայուն գագաթի հարևան գագաթները ստանում են մեկական ավազահատիկ, իսկ այդ գագաթի բարձրությունը պակասում է $h_{\max}(v)$ -ով: Փլուզման պրոցեսը շարունակվում է այնքան, մինչև համակարգը կրկին դառնա կայուն: Հաստատված կայուն վիճակը իրենից ներկայացնում է $T + 1$ պահին համակարգի վիճակը՝ C_{T+1} : v գագաթի աստիճան կոչվում է նրանից դուրս եկող կողերի թիվը, որը կնշանակենք d_v : Եթե $h_{\max}(v) = d_v$, ապա v գագաթը կոչվում է կոնսերվատիվ, իսկ եթե $h_{\max}(v) > d_v$, ապա տվյալ գագաթը կոչվում է դիսսիպատիվ: Դիսսիպատիվ գագաթների (եզերերի) առկայության դեպքում փլուզման պրոցեսը վաղ թե ուշ դադարում է, քանի որ այդ գագաթներում տեղի է ունենում մասնիկների կորուստ: Ավելին, մոդելի աբելյան հատկության շնորհիվ C_{T+1} վիճակը կախված չէ փլուզումների հերթականությունից: Ըստ սահմանման՝ փլուզման պրոցեսը բջջային ավտոմատ է [56], որը թույլ է տալիս թվային մոդելավորել համակարգը [64]:

Դիսսիպատիվ գագաթների բացակայության դեպքում համակարգում բավական քանակի մասնիկներ կուտակելուց հետո համակարգը դառնում է անկայուն, այսինքն փլուզումները երբեք չեն դադարում: Այդպիսի մոդելը կոչվում է ֆիքսված էներգիայով ավազահատիկների մոդել (fixed-energy sandpile) [65] - [68]:

Պարզվում է, որ բավական երկարատև դինամիկական պրոցեսի արդյունքում, որոշ պահից սկսած, բարձրությունների բոլոր հնարավոր կոնֆիգուրացիաներից միայն մի մասն է՝ այսպես կոչված ռեկուրենտ (վերադարձելի) կոնֆիգուրացիաները, ժամանակ առ ժամանակ կրկնվում: Այն կոնֆիգուրացիաները, որոնք առաջանում են առավելագույնը մեկ անգամ, կոչվում են անցողիկ (transient): Մեծ ժամանակների սահմանում մոդելի ստացիոնար վիճակը բնութագրվում է հավանականության հավասարաչափ բաշխման չափով՝ սահմանված ռեկուրենտ կոնֆիգուրացիաների բազմության վրա: Անցողիկ կոնֆիգուրացիաների չափը դառնում է գրո:

Ռեկուրենտ վիճակների հավանականության հավասարաչափ բաշխման հատկությունը թույլ տվեց ավագահատիկների արելյան մոդելը արտապատկերել ծածկող ծառերի թվարկման խնդրի վրա և ստանալ ավագահատիկների բարձրությունների բաշխման և կետային կորելյացիաների հաշվարկի համար ուժեղ գործիք [69] - [80]:

Հավասարաչափ բաշխմամբ պատահական ծածկող ծառերի գեներացման համար Բրոդերի, Ալդուսի և Վիլսոնի կողմից մշակված ալգորիթմները [81] - [85], որոնք հիմնված են ինքնախուսափող պատահական դեգերումների [86] ձևափոխված տեսակ հանդիսացող ջնջված ցիկլերով դեգերումների (loop-erased random walk) [87] - [92] վրա: Այդ ալգորիթմը թույլ է տալիս ոչ միայն կատարել թվային մոդելավորում, այլ նաև տեսական հաշվարկներ՝ հաստատելով հավասարաչափ բաշխմամբ ծածկող ծառերի ճյուղերի և ջնջված ցիկլերով դեգերումների հետագծի միջև խորը կապը: Նշված դեգերումները հանդիսանում են ցանցի վրա պարզ դեգերման [93] ավելի զարգացված տարբերակներ:

Այստեղ անհրաժեշտ է ընդգծել, որ հավասարաչափ բաշխմամբ պատահական ծածկող ծառերի գեներացման Վիլսոնի ալգորիթմը էապես տարբերվում է մինիմալ ծածկող ծառ կառուցող Պրիմի և Կրուսկալի ալգորիթմներից: Պրիմի ալգորիթմը գազաթակենտրոն մոտեցում է: Այն սկսում է մեկ գազաթից և աստիճանաբար մեծացնում է ծառը՝ յուրաքանչյուր քայլում ավելացնելով այն նվազագույն կշռով կողը, որը ծառին պատկանող գազաթը կապում է ծառից դուրս գտնվող գազաթի հետ: Կրուսկալի ալգորիթմը, հակառակը, կողակենտրոն մոտեցում է: Նախ բոլոր կողերը դասավորվում են ըստ կշիռների և ապա հերթով ավելացվում՝ բաց թողնելով այն կողերը, որոնք կառաջացնեին ցիկլ: Այս ալգորիթմները նախատեսված են նվազագույն կշռով ծածկող ծառ կառուցելու համար, մինչդեռ Վիլսոնի ալգորիթմի նպատակը հավասարաչափ բաշխմամբ պատահական ծածկող ծառ գեներացնելն է, որտեղ տվյալ գրաֆի բոլոր ծածկող ծառերը ընտրվում են նույն հավանականությամբ:

Երկչափ ավագահատիկների արելյան մոդելի կորելյացիոն ֆունկցիաների և սահմանային էֆեկտների ուսումնասիրության միջոցով կապ է հաստատվել նաև $c = -2$ կենտրոնական լիցքով (central charge) լոգարիթմական կոնֆորմ դաշտի (logarithmic conformal field theory, LCFT) տեսության հետ [94] - [121]: Լոգարիթմական կոնֆորմ դաշտի տեսության միջոցով կատարվել են որոշակի կանխատեսումներ նշված դիտարկելի մեծությունների համար, որոնք հնարավոր է ստուգել ուղղակի թվային մոդելավորման կամ անալիտիկ հաշվարկներով: Մինչ այժմ հնարավոր բոլոր ստուգումները հաջող են եղել:

Տարբեր պարզագույն ցանցերի վրա ավագահատիկների արելյան մոդելի ճշգրիտ լուծումը [69] - [71], ցույց է տվել, որ ռենդոմիսմբի գաղափարները կիրառող մոտեցումը [62] հանգեցնում է սխալ արդյունքների: Մեծ հետաքրքրություն է ներկայացնում ավագահատիկների արելյան մոդելի դիտարկումը քառակուսային ցանցի վրա, քանի որ այն, լինելով ավելի բարդ խնդիր, լիարժեքորեն նկարագրում է ինքնակազմակերպված կրիտիկականության ոչ լոկալ հատկությունները: Բանն այն է, որ ոչ լոկալ երևույթների/հատկությունների առկայությունը հաճախ ճշգրիտ հաշվարկները դարձնում են ծայրահեղ բարդ, իսկ երբեմն՝ ընդհանրապես անհնար:

Ավագահատիկների արելյան մոդելում ոչ լոկալ բնույթի դրսևորման հիմնական աղբյուրներից է ռեկուրենտ կոնֆիգուրացիայի չափանիշը: Դիարի այրման ալգորիթմով [70], [80] տվյալ կոնֆիգուրացիայի ռեկուրենտությունը ստուգելու համար անհրաժեշտ է ամբողջ կոնֆիգուրացիայի փուլային վերլուծություն՝ գազաթների այրման հաջորդականությամբ, որը որոշվում է ոչ թե լոկալ կանոնով, այլ կախված է ամբողջ կոնֆիգուրացիայից:

Անալիտիկ ուսումնասիրության տեսանկյունից հետաքրքիր է, որ հարթ ցանցերի վրա տվյալ հանգույցի բարձրությունները մոդելի դինամիկայի և կոնֆորմ դաշտի տեսանկյունից լոկալ պատահական մեծություններ են, սակայն նրանց բաշխման հաշվարկը հանգեցնում է հավասարաչափ բաշխմամբ ծածկող ծառերի և մոնոմերներ պարունակող խիտ դասավորված դայմերների մոդելների ոչ լոկալ բնութագրիչների հաշվարկի խնդիրների: Ոչ լոկալ բնութագրիչի կարևոր օրինակ է տվյալ հանգույցի այն հարևանների թիվը, որոնք ծածկող ծառում հանդիսանում են տվյալ հանգույցի նախորդները (predecessors): Այս թվի ալգորիթմական հաշվարկը պահանջում է ծառի երկայնքով անցում կատարել տվյալ հանգույցի հարևաններից սկսվող ուղիներով: Ավելին, այդ ուղիների երկարությունների բաշխումները ունեն աստիճանային բնույթ:

Ռոտոր-երթուղիչ մոդելը (rotor-router model), որը հայտնի է նաև որպես Էյլերյան դեգերում (Eulerian walker) կամ քվազիպատահական դեգերում (quasi-random walk), ներմուծվել է Պրիեզդևի կողմից որպես պատահական դեգերման դետերմինիստական անալոգ և ինքնակազմակերպված կրիտիկականության մոդել [122]: Առաջին դասական աշխատանքում ցույց է տրվել, որ յուրաքանչյուր գազաթում ռոտորի ուղղությունը ֆիքսված կանոնով պտտող մասնիկների դինամիկան փակ գրաֆների վրա առաջացնում է Էյլերյան ցիկլեր, իսկ բաց գրաֆների դեպքում կապվում է ավագահատիկների արելյան մոդելի ռեկուրենտ վիճակների բազմության վրա կառուցված արելյան խմբի և կրիտիկական ստացիոնար վարքի հետ [123]: Հետագա աշխատանքներում Էյլերյան դեգերումների դինամիկան ուսումնասիրվել է նաև avalanche-ների, դիֆուզիոն վարքի և կրիտիկական ցուցիչների տեսանկյունից [124]:

Մաթեմատիկական գրականության մեջ ավագահատիկների արելյան մոդելը հայտնի է որպես chip-firing: Կատարված մի շարք մաթեմատիկական աշխատանքներում և ակնարկներում կառուցվել է միասնական ֆորմալ տեսություն ուղղորդված գրաֆների վրա rotor-router ու chip-firing մոդելների դետերմինիստական դինամիկայի վերաբերյալ, ընդգծվել է արելյան կառուցվածքը, ինչպես նաև ձևակերպվել են մի շարք բաց խնդիրներ [125]:

Այլ աշխատանքներում մի մասնիկով rotor-router մոդելը (rotor walk) մեկնաբանվել է նաև որպես Մարկովյան շղթաների դե-հանդումացված տարբերակ. այդ մոտեցման մեջ պատահական անցումների փոխարեն յուրաքանչյուր գագաթից ելքերը կատարվում են ֆիքսված ցիկլիկ հերթականությամբ, ինչի հետևանքով գագաթների որոշ այցելման հաճախություններ մոտենում են պատահական դեգերման համապատասխան միջիններին փոքր շեղումներով [126]: Ստացվել են նաև այդ դեգերման հետագծի կառուցվածքի վերաբերյալ [127] - [131], ինչպես նաև անվերջ ցանցերի վրա ռեկուրենտ վիճակների ու մասնիկի սկզբնակետից անվերջ հեռու փախուստի (escape rate) մասին մի շարք արդյունքներ [132]:

Ինքնակազմակերպված կրիտիկականության ուսումնասիրման տեսանկյունից հետաքրքրություն են ներկայացնում նաև կենսաբանական և էվոլյուցիոն համակարգերի ցանցային մոդելները: Առաջարկվել է վիրուսի և իմունային համակարգի համաէվոլյուցիայի ցանցային մոդել (co-evolution of virus and immune systems, Red Queen walk, Bak-Sneppen model) [133] - [135], որտեղ բնական ենթադրությունների դեպքում ինչպես վիրուսային պոպուլյացիայի, այնպես էլ իմունային համակարգի ակտիվության բաշխումները դինամիկայի ընթացքում ձգտում են ինքնակազմակերպված կրիտիկական վիճակի: Էվոլյուցիոն պրոցեսներում իմունիտետ-վիրուս փոխկապակցված ադապտացիաները կամ պարբերական վերափոխումները հանգեցնում են շղթայական պրոցեսների, պարբերական կտրուկ փոփոխությունների և աստիճանային բաշխումներով բնութագրվող կրիտիկական վարքի:

Անհավասարակշիռ վիճակագրական մեխանիկայում մեկ այլ առանցքային դեր խաղացող մոդելներից է լրիվ ասիմետրիկ պարզ բացառման պրոցեսը (totally asymmetric simple exclusion process, TASEP) [136] - [168]: Այն իրենից ներկայացնում է միաչափ ցանցի վրա փոխազդող մասնիկների ուղղորդված հոսքի մոդել, որտեղ յուրաքանչյուր հանգույցում կարող է գտնվել առավելագույնը մեկ մասնիկ, իսկ մասնիկների տեղաշարժը կատարվում է միայն մեկ ուղղությամբ՝ հաշվի առնելով բացառման պայմանը: Այս պարզ սահմանման շնորհիվ TASEP-ը դարձել է ոչ հավասարակշիռ համակարգերում հոսքերի, խցանումների, սահմանային էֆեկտների և կոլեկտիվ վարքի ուսումնասիրման հիմնարար մոդել: TASEP-ը լայնորեն կիրառվում է ինչպես տեսական, այնպես էլ կիրառական խնդիրներում: Մոդելավորվելով որպես բջջային ավտոմատ [169], այն ծառայում է որպես ճանապարհների վրա ավտոմեքենաների խցանումների [170], կենսապոլիմերների սինթեզի, մոլեկուլային շարժիչների, բջջային տրանսպորտի, թրջման պրոցեսի [171] և այլ ուղղորդված տեղափոխման պրոցեսների պարզեցված մոդել:

TASEP-ը կարևոր կապեր ունի նաև այլ մաթեմատիկական և ֆիզիկական մոդելների հետ: Մասնավորապես, այն հանդիսանում է Կարդար-Պարիսի-Շանգի (Kardar-Parisi-Zhang, KPZ) ունիվերսալության դասի հիմնական մոդելներից մեկը և օգտագործվում է աճող մակերևույթների, պատահական մատրիցների և մասշտաբային ֆլուկտուացիաների ուսումնասիրության մեջ [172] - [178]:

Մոդելի տարբեր ձևափոխումների համար կատարվել են բազմաթիվ անալիտիկ հետազոտություններ, որոնց հիմքում հաճախ ընկած է Բետեի անգաջը [179]: Այդ մեթոդը թույլ է տալիս ստանալ համակարգի սպեկտրալ հատկությունները,

ռելաքսացիոն դինամիկան, հոսքերի բաշխումները և ոչ ստացիոնար հավանականությունները: Բացի այդ, TASEP-ի որոշ տարբերակներ կապված են կոմբինատոր խնդիրների, այդ թվում՝ ամենամեծ ընդհանուր ենթահաջորդականության որոնման [180] և հարակից օպտիմալացման խնդիրների հետ: Այս կապերը TASEP-ը դարձնում են ոչ միայն ֆիզիկական, այլև մաթեմատիկական տեսանկյունից կարևոր ճշգրիտ լուծվող մոդել:

Հաջորդ բաժնում ներկայացվում են գրականության մեջ հայտնի արդյունքները, դրանցից բխող չլուծված խնդիրները, ինչպես նաև ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հեղինակի կողմից և համահեղինակությամբ հրատարակված արդյունքները:

1.2. Հիմնական արդյունքները

Հետազոտվել են անհավասարակշիռ և հավասարակշիռ վիճակագրական մեխանիկայի ցանցային մոդելներ, մասնավորապես՝ Փոթսի սպինային մոդելը, խիտ դասավորված դայմերների մոդելը (dimer model), լրիվ ասիմետրիկ պարզ բացառման պրոցեսը (totally asymmetric simple exclusion process), ավագահատիկների արեյան մոդելը (Abelian sandpile model), հավասարաչափ բաշխմամբ ծածկող ծառերը, ջնջված ցիկլերով դեգերման մոդելը, $O(n)$ հանգուցային մոդելը (loop model), rotor-router մոդելը և դրանց հարակից այլ մոդելներ: Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում ներկայացվում են հեղինակի կողմից և համահեղինակությամբ հրատարակված հետևյալ արդյունքները:

- [266] աշխատանքում հետազոտվել է աստիճանաձև անիզոտրոպ գրաֆների (ցանցերի) վրա սահմանված q վիճակների թվով Փոթսի սպինային մոդելը: Ուսումնասիրվել է վիճակագրական գումարի (հավանականությունների ծնորդ ֆունկցիայի) ներկայացումը ըստ ցանցի բոլոր ենթագրաֆներով գումարի: Մասնավորապես՝ օգտագործելով հաշվման համար գրաֆի կողերի կցման և արտաքսման հատկությունը՝ կառուցվել է ռեկուրենտ գծային հավասարումների համակարգ (ֆիքսված չափսերով տրանսֆեր մատրիցա): Լուծելով այն՝ հաշվարկվել է ճշգրիտ վիճակագրական գումարը և կառուցվել են կոմպլեքս հարթության վրա ֆիշերյան գրոները: Այս արդյունքը հանդիսանում է [9] աշխատանքի ընդհանրացում:
- [267] աշխատանքում դիտարկվել է վերջավոր օղակների վրա (պարբերական եզրային պայմաններով միաչափ ցանցերի վրա) ֆիքսված մասնիկների թվով և դիսկրետ ժամանակով լրիվ ասիմետրիկ պարզ բացառման պրոցեսը (totally asymmetric simple exclusion process, TASEP): Ընտրվել է որպես օրինակ ետընթաց հաջորդականությամբ վիճակի թարմացման ձևը, որը պարբերական եզրային պայմանների համար հանդիսանում է զուգահեռ տեղաշարժի նկատմամբ ինվարիանտ: Ապացուցվել է, որ այս ձևով սահմանված վիճակի թարմացումը հանգեցնում է ստացիոնար վիճակի, որտեղ մասնիկների բոլոր հնարավոր

դասավորությունները հավասար հավանականություն ունեն: Հաշվարկվել են t ժամանակամիջոցում մի վիճակից մյուս վիճակին անցման պայմանական հավանականությունների բաշխման ծնորդ ֆունկցիաները, մասնիկների հոսքի միջին արագությունն ու դիֆուզիայի գործակիցը՝ զարգացման բոլոր փուլերում: Ստացվել է ճշգրիտ և հստակ արտահայտություն TASEP-ի ստացիոնար արագության համար՝ կամայական L չափի օղակների, մասնիկների P թվի և մասնիկի քայլ կատարելու z հավանականության դեպքում

$$v_{st}(L, P, z) = \frac{(P-1)!(L-P)}{(L-1)!} \sum_{i=1}^P \frac{(L-i-1)!}{(P-i)!} z^i = \frac{L-P}{L-1} {}_2F_1(1, 1-P, 2-L; z),$$

որը թերմոդինամիկ սահմանում, այսինքն մասնիկների ֆիքսված $\rho = P/L$ խտությամբ անվերջ ցանցի համար, բերվում է [140] հոդվածի արդյունքին՝

$$v_{st} = z \frac{1-\rho}{1-\rho z}:$$

Մյուս կողմից, անընդհատ ժամանակի սահմանում ստացվում է [151] արդյունքը՝

$$v_{st} = \frac{L-P}{L-1}$$

(տես նաև [141] ակնարկը): Փոքր համակարգերի զարգացումը/էվոլյուցիան դեպի ստացիոնար վիճակ հստակ ցուցադրվել է: Դիտարկելով ծնորդ ֆունկցիան որպես թերմոդինամիկ համակարգի վիճակագրական գումար՝ ուսումնասիրվել են դրա զրոների բաշխումը կոմպլեքս հարթություններում:

- [268] հոդվածում դիտարկվել է TASEP մոդելի ավելի ընդհանրացված դեպք, որտեղ մասնիկների քայլ կատարելու հավանականությունները տարբեր են: Բետեի անզացի կոմբինատոր մոտեցման միջոցով ստացվել են դիսկրետ t ժամանակամիջոցում ոչ ստացիոնար վիճակների միջև անցման հավանականությունների համար դետերմինանտների տեսք ունեցող արտահայտություններ: Անփոփոխ թողնելով մասնիկների քանակը՝ անընդհատ ժամանակի և անվերջ ցանցի անցման սահմանում այս արդյունքը զուգամիտում է նախկինում հայտնի [142] արդյունքին:
- [269] հոդվածում ներկայացված է TASEP մոդելը՝ օղակի վրա դիսկրետ ժամանակով և մասնիկների քայլ կատարելու հավանականությունների տարբեր լինելու դեպքում: Ճշգրիտ հաշվարկվել են մի մասնիկին բաժին ընկնող միջին հոսքի արագությունը տարբեր դինամիկաների համար՝ զարգացման բոլոր փուլերում: Բացահայտ կերպով ցուցադրվել է դեպի ստացիոնար վիճակին անցումը: Այս արդյունքները հանդիսանում են [159], [162], [164] և [168] հոդվածներում ներկայացված արդյունքների ընդհանրացումներ և շարունակություն: Այստեղ կներկայացնենք միայն զուգահեռ թարմացմամբ ստացիոնար արագության արտահայտությունը այն դեպքում, երբ բոլոր մասնիկների քայլ կատարելու հավանականությունները հավասար են՝

$$v_{st}(L, P, z) = \frac{z}{P} + z \frac{(P-1)(L-P-2)}{2P(1-z)} \frac{{}_2F_1\left(2-P, 3-L+P, 3; \frac{1}{1-z}\right)}{{}_2F_1\left(1-P, 2-L+P, 2; \frac{1}{1-z}\right)}.$$

- [270] հողվածում անալիտիկորեն ուսումնասիրվել է երկչափ քառակուսային ցանցի վրա՝ կենտրոնում մեկ դատարկ վանդակով (մոնոմերով), խիտ դասավորված դայմերային մոդելը (դոմինոյի խաղաքարերով ծածկույթը): Դիտարկելով ծածկող ծառերի ներկայացման ընդհանրացում հանդիսացող ծածկող սարդոստայններով ներկայացումը (spanning webs representation)՝ ստացվել են դայմերների շարժունակությունը նկարագրող պատահական մեծությունների համար դետերմինանտային արտահայտություններ: Մեծ ցանցերի սահմանային դեպքում այդ արտահայտությունները հանգեցվում են Թոփլիցի դետերմինանտների և դրանց միևնույնի հաշվարկին: Ազատ վանդակի լրիվ բլոկավորված լինելու (jammed) հավանականությունը, ինչպես նաև դիֆուզիայի այլ բնութագրիչներ, ճշգրիտ հաշվարկվել են՝

$$p_{mob} = \sqrt{2} - 1,$$

$$p(1) = \frac{57}{4} - 10\sqrt{2},$$

$$p(2) = \frac{1}{32}(72817\sqrt{2} - 102977):$$

Նրանց արժեքները համընկել են [35] հողվածում ներկայացված թվային արդյունքների և առաջ քաշված հիպոթեզների հետ:

- [271]-[275] հողվածները վերաբերում են երկչափ քառակուսային ցանցի վրա ավազահատիկների աբեյան մոդելին: Ցույց է տրվել, որ գազաթի միջին բարձրությունը ուղղակիորեն կապված է այն բանի հավանականության հետ, որ ջնջված ցիկլերով պատահական դեգերման (loop-erased random walk, LERW) հետագիծը անցնում է մեկնարկային գազաթի տվյալ հարևան գազաթով (վերադարձի հավանականություն, return probability, looping constant): Այդ փաստը ապացուցվել է խիտ դասավորված լոկալ մոնոմեր-դայմեր մոդելի վրա արտապատկերման միջոցով: Հաշվարկների ընթացքում օգտագործվել են Ֆիշերի և Ստեֆենսոնի կողմից ստացված մոնոմեր-մոնոմեր, դայմեր- դայմեր ու դայմեր-մոնոմեր կորելյացիոն ֆունկցիաների արժեքները [22]: Չնայած այն բանին, որ նշված օգտագործված մեծությունների արժեքները իռացիոնալ թվեր են, ապացուցվել է, որ վերադարձի հավանականությունը հավասար է

$$P_{ret} = 5/16,$$

որի միջոցով էլ անալիտիկորեն հաշվարկվել է միջին բարձրությունը [275]

$$\langle h \rangle = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 = 25/8 = 3.125:$$

Այս արդյունքը թույլ տվեց ապացուցել բարձրության փոփոխականների հավանականության արժեքների վերաբերյալ նախկինում ձևակերպված հիպոթեզը: Այդ հավանականության բաշխումը վերջնականորեն ստացավ հետևյալ տեսքը

$$P_1 = \frac{2(\pi - 2)}{\pi^3},$$

$$P_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} - \frac{3}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^3},$$

$$P_3 = \frac{3}{8} + \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3},$$

$$P_4 = 1 - P_1 - P_2 - P_3 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^3}:$$

Այստեղ նույնպես, չնայած առանձին բարձրությունների հավանականությունները պարունակում են իռացիոնալ արտահայտություններ, միջին բարձրությունը ստացվում է ռացիոնալ: Հետագայում ջնջված ցիկլերով դեգերման վերադարձի հավանականության հաշվարկի և միջին բարձրության հետ կապի վերաբերյալ կատարվել են այլընտրանքային մաթեմատիկական աշխատանքներ [89], [90], [92]:

Երկկետային կորելյացիոն ֆունկցիաների ասիմպտոտիկ արտահայտությունների համար ձևակերպված հիպոթեզում

$$\sigma_{a,b}(r) = P_{a,b}(r) - P_a P_b = S_{a,b} \frac{1}{r^4} + D_{a,b} \frac{\log r}{r^4} + K_{a,b} \frac{\log^2 r}{r^4} \dots,$$

որտեղ

$$S_{a,b} = \alpha_a \alpha_b C + (\alpha_a \beta_b + \beta_a \alpha_b) B + \beta_a \beta_b A,$$

$$D_{a,b} = 2\alpha_a \alpha_b B + (\alpha_a \beta_b + \beta_a \alpha_b) A,$$

$$K_{a,b} = \alpha_a \alpha_b A,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = \frac{8 - \pi}{2(\pi - 2)}, \quad \alpha_4 = -\frac{\pi + 4}{2(\pi - 2)},$$

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = -\frac{48 - 12\pi + 5\pi^2 - \pi^3}{4(\pi - 2)^2}, \quad \beta_4 = \frac{32 + 4\pi + \pi^2 - \pi^3}{4(\pi - 2)^2},$$

$$A \cong -\frac{2(\pi - 2)^2}{\pi^6}$$

$$B \cong -0.0045 \pm 0.0005$$

$$C \cong -0.009 \pm 0.0005$$

A գործակցի արժեքը ստացվել էր լուգարիթմական կոնֆորմ դաշտի կանխատեսման միջոցով, իսկ B և C գործակիցների արժեքները՝ թվային սիմուլյացիաների միջոցով: Կոմբինատոր ճանապարհով [271] և [273] աշխատանքներում հաշվարկվեցին $\sigma_{1,b}(r)$,

$b = 2, 3, 4$ համար ասիմպտոտիկ արտահայտությունները, և ցույց տրվեց, որ A գործակցի արժեքը ճիշտ էր կանխատեսված, իսկ B գործակցիցը հավասար է

$$B = -\frac{2(\pi - 2)^2}{\pi^6} \left(\gamma + \frac{3}{2} \log 2 \right) - \frac{(\pi - 2)(16 - 5\pi)}{\pi^6} = -0.0047305 \dots,$$

որտեղ $\gamma = 0.57721 \dots$ էյլերի հաստատունն է:

C գործակցի անալիտիկ արժեքը այս պահին դեռ հայտնի չէ: Այն հայտնվում է $a, b \geq 2$ բարձրություններով կորելյացիաների արտահայտության մեջ, որոնց համար վերջավոր մատրիցներով դետերմինանտային ներկայացումները բացակայում են:

Թվարկված մեծությունների վերջնական ճշգրիտ արժեքները 1990թ.-ից սկսած մոտ 20 տարի մնում էին հիպոթեզի կարգավիճակում, չնայած այն բանին, որ

1. Դիսկի կողմից կառուցվել էր ավագահատիկների մոդելի համար արելյան տեսությունը և ծածկող ծառերի թվարկման մեթոդով հաշվարկվել էին P_1 և $P_{1,1}(r)$, $r \gg 1$ հավանականությունները [70],[72],[80];
 2. Պրիեզժևի կողմից մշակվել էր հաշվարկի համար θ -գրաֆների թվարկման մեթոդը, որը բերեց 4×4 մատրիցի դետերմինանտային արտահայտության քառակի ինտեգրալի [73],[74];
 3. Ռյուելի կողմից կատարվել էր օպտիմալացում՝ ստանալով կրկնակի ինտեգրալի տեսքով անալիտիկ արտահայտություն, և դրա բարձր ճշտությամբ թվային մոտարկում [113], [116];
 4. Գրասսբերգերի կողմից իրականացվել էին մոդելի թվային սիմուլյացիաներ [64] (Գրասսբերգերի հիպոթեզը):
- [276] աշխատանքում դիտարկվել է քառակուսային ցանցի վրա կոնսերվատիվ գազաթնետով (փակ եզրերով) ֆիքսված էներգիայով ավագահատիկների մոդելը (fixed-energy sandpile model), և կապ է հաստատվել նրա շեմային խտության (threshold density) $\rho_{th}(h_0)$ և բաց եզրերով (կլանող դիսսիպատիվ գազաթնետով) ավագահատիկների արելյան մոդելի ստացիոնար խտության

$$\rho_{st} = 17/8 = 2.125$$

միջև: Նշենք, որ միջին բարձրության (մասնիկների խտության) թվային արժեքը կախված է բարձրությունների համարակալման ընտրված պայմանականությունից: Դիտարկելով դատարկ դաշտով (մինիմալ $h_0 = 0$ բարձրությամբ) սկզբնական վիճակը՝ [65] աշխատանքում Ֆեյը, Լևինը և Վիլսոնը նկատել էին չնչին տարբերություն՝

$$\rho_{th}(0) = 2.125288 \dots:$$

[276]-ում, ընդհանրացնելով սկզբնական վիճակների բազմությունը, դիտարկվել են բացասական սկզբնական բարձրություններ: Մեր կողմից առաջ էր քաշվել հիպոթեզ, որ $\rho_{th}(h_0)$ և ρ_{st} տարբերությունը կտրուկ ձգտում է զրոյի, երբ սկզբնական

բացասական բարձրությունը բացարձակ արժեքով ձգտում է անվերջության ($h_0 \rightarrow -\infty$): Այս հիպոթեզը ապացուցվեց Լևինի կողմից “**Threshold State and a Conjecture of Poghosyan, Poghosyan, Priezzhev and Ruelle**” վերնագրով [67] մաթեմատիկական աշխատանքում, որում կառուցվել էր ֆորմալ տեսություն:

- [277]-ում երկչափ կիսահարթության վրա պերկոլյացիայի մոդելի ($O(1)$ loop model) և ծածկող ծառերի մոդելի ($O(0)$ loop model) համար ստացվել են ճշգրիտ եզրային կորելյացիաների արժեքները: Մասնավորապես՝

$$P_a = \frac{(4 - \pi)(9\pi - 22)}{3\pi^2}, \quad P_b = \frac{2(4 - \pi)(11 - 3\pi)}{3\pi^2}$$

- [278]-ում դիտարկվել են սկզբնական և վերջնական դիրքերը իրարից որոշակի r հեռավորության վրա գտնվող երկու կետերում խմբավորած k հատ LERW հետագծերի կորելյացիոն ֆունկցիան: Օգտագործելով կոմբինատոր մեթոդներ՝ ստացվել է լոգարիթմական արտադրիչ պարունակող ասիմպտոտ, որը համեմատվել է այլ մոդելների համապատասխան մեծությունների հետ: Կապ է հաստատվել նաև համապատասխան կոնֆորմ դաշտի տեսության հետ:
- [279]-ում ուսումնասիրվել է գլանային մակերևույթի վրա տեղադրված քառակուսային ցանցի համար սահմանված դայմերների խիտ դասավորության մոդելը: Օգտագործելով Տենպերլիի և Լեյբի տրանսֆեր մատրիցայի ֆորմալիզմը, և տրանսֆեր մատրիցայի ադապտացման շնորհիվ սլաքների կոնֆիգուրացիաները բաժանելով տարբեր դասերի ըստ դիտարկվող տոպոլոգիայում առաջացող չկծկվող ցիկլերի քանակի՝ հաշվարկվել են վիճակագրական գումարները (ծնորդ ֆունկցիաները): Տրանսֆեր մատրիցայում առաջացող ժորդանյան բջիջների պրոբլեմը ցուցադրելու նպատակով ներմուծվել է ընդլայնված տրանսֆեր մատրիցա, որը ոչ միայն պահում է դայմերների դիրքերի մասին ինֆորմացիան, այլև գեներացնում է նրանց հետ կապված ծառերի ճյուղերի երկայնքով տարածվող գոյներ:
- [280]-ում ուսումնասիրվել է rotor-router մոդելի համար կլանող կետեր չպարունակող ու ռեկուրենտ վիճակում գտնվող միջավայրում մասնիկի վարքի որոշակի հատկություններ: Մասնավորապես, անալիտիկորեն հաշվարկվել են առաջացող դայմերների (2 երկարությամբ ցիկլերի) և կոնտուրների (2-ից ավել գագաթ պարունակող ցիկլերի) միջև կորելյացիան, ինչպես նաև նրանց քանակների տարբերության միջին արժեքը: Ուսումնասիրվել են նաև մասնիկի դիֆուզիոն հատկությունները:
- [281]-ում ապացուցվել է rotor-router մոլտիլեյերյան դեգերման համար ռոտորի սլաքներով կազմված ցիկլերի շրջելիության վերաբերյալ թեորեմ (loop-reversibility theorem): Բացահայտվել են դեգերող մասնիկի հետագծերի ասիմպտոտիկ կառուցվածքները և մասնիկի սուբդիֆուզիոն հատկությունները:
- [282] աշխատանքում հետազոտվել է rotor-router մոդելը անվերջ քառակուսային ցանցի վրա: Այն իրենից ներկայացնում է մասնիկի քվազիպատահական դեգերման

(ինֆորմացիայի տարածման) պրոցես: Դիտարկվել են ցանցի այն պիտակավորված գագաթների բազմությունը, որոնք ռոտորների կողմից գեներացրել են փակ ցիկլեր: Այդ գագաթների համար հիպոթեզ էր առաջ քաշվել, որ նրանց առաջացման հերթականությամբ կառուցված հետագիծը ասիմպտոտիկորեն ստանում է արքիմեդյան պարույրի տեսք: Մեր կողմից ցույց է տրվել, որ այդ հատկությունը ուղղակիորեն կապված է այն ծառանման կառուցվածքների հետ, որոնք նկարագրում են դեգերման ընթացքում այցելված գագաթների կլաստերի էվոլյուցիան: Քառակուսային ցանցի դեպքում ստացել ենք, որ սկզբնականի այցելությունների միջին քանակը

$$\langle n_0(t) \rangle = 4\langle n(t) \rangle + O(1), \quad t \gg 1$$

որտեղ $\langle n(t) \rangle$ -ն պարույրի պտույտների միջին քանակն է:

- [283] աշխատանքում ուսումնասիրվում է rotor-router դեգերումը կիսաանվերջ գլանի վրա: Ցույց է տրվել, որ այդ երկրաչափության մեջ դետերմինիստական rotor-router դինամիկան առաջացնում է հատուկ պարբերական կառուցվածքներ, որոնք կապված են ցիկլերի շրջելիության, էյլերյան շրջայցերի և մոդելի ենթադիֆուզիոն վարքի հետ:
- [284] աշխատանքը ներկայացնում է երկչափ հավասարաչափ ծածկող ծառերի տեսությունում հեղինակի և համահեղինակների կողմից ստացված արդյունքների ակնարկ: Դրանում ամփոփվում են ջնջված ցիկլերով պատահական դեգերումների վերադարձի հավանականության, աբելյան ավազահատիկների մոդելի միջին բարձրության և դրանց հետ կապված հիմնարար հաստատումների վերաբերյալ ստացված արդյունքները:

2. ԻՆՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ՓՈԽԱՆԱԿՄԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԵՎ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՄՇԱԿՈՒՄ

2.1. Արդի վիճակի վերլուծություն

Վերջին տասնամյակներում մեծ մասշտաբավորվող (large-scale) ցանցային հաշվարկային համակարգերը՝ կլաստերները, grid-համակարգերը և ամպային հարթակները, լայնորեն կիրառվում են գիտական հետազոտություններում, տնտեսության, սոցիալական համակարգերի, հաղորդակցության և բաշխված հաշվարկների տարբեր ոլորտներում: Դրան զուգահեռ արագ զարգանում են նաև ժամանակակից սենսորային (sensor), հավասարազոր հանգույցներով (peer-to-peer) և շարժական ինքնակազմավորվող (mobile ad-hoc) ցանցերը, որոնք հաճախ գործում են որպես ինքնակազմակերպվող բազմաագենտային համակարգեր (self-organizing autonomous multi-agent systems) [181] - [183]:

Թվարկված ցանցերի հնարավոր կիրառությունները վերջին տարիներին դարձել են ակտիվ հետազոտությունների առարկա՝ ընդգրկելով այնպիսի ուղղություններ, ինչպիսիք են ինքնավար խելացի ավտոմեքենաների հոսքերը, տարբեր դիտարկումների և մոնիտորինգի համար կիրառվող անօդաչու թռչող սարքերի երամները, ինչպես նաև իրադարձությունների հայտնաբերման (event detection) համար օգտագործվող սենսորային ցանցերը: Օրինակ՝ սենսորային ցանցերում անհրաժեշտ է լինում մշակել ապակենտրոն գնահատման և հայտնաբերման ալգորիթմներ, որոնք սենսորային դիտարկումների հիման վրա կարող են արձանագրել որոշակի իրադարձության առաջացումը: Սոցիալական ցանցերում նման մեխանիզմները կարող են կիրառվել ինֆորմացիայի գերարագ (վիրուսային) տարածման մոդելավորման համար [184] - [185]:

Համակարգերի իրականացման ընթացքում առաջանում է այնպիսի ալգորիթմների մշակման պահանջ, որոնք թույլ կտան ապահովել ցանցերում տարբեր բաղադրիչների գործողությունների համակարգումը, համաձայնեցումը և ինֆորմացիայի օպտիմալ փոխանակումը՝ առանց կենտրոնական կառավարման [186]: Մասնավորապես, անօդաչու թռչող սարքերի երամների դեպքում անհրաժեշտ են ապակենտրոն, օպտիմալ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն հաղորդակցման ալգորիթմներ, որոնք թույլ կտան համակարգել առանձին ԱԹՍ-ների գործողությունները և պահպանել համակարգի աշխատանքը ցանցի մասնակի խափանումների կամ կապերի փոփոխության պայմաններում: Որպես կանոն, նման ցանցերը գործում են միջավայրերում, որտեղ առկա են հաշվարկային, հաղորդակցական և էներգետիկ ռեսուրսների սահմանափակումներ, իսկ ցանցի կառուցվածքը ժամանակի ընթացքում կարող է փոփոխվել՝ հանգույցների շարժման, միացման, անջատման կամ խափանման պատճառով: Նկարագրված խնդիրների ուսումնասիրության և ալգորիթմների մշակման համար լայնորեն կիրառվում են դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության, հավանականությունների տեսության, զուգահեռ ծրագրավորման և բաշխված հաշվարկային համակարգերի մեթոդները:

Ինքնակազմակերպվող բազմաագենտային համակարգերում ցանցի յուրաքանչյուր հանգույց որպես կանոն հաղորդակցվում է միայն իր որոշ հարևանների

կամ ընտրված փոքր ենթաբազմության հետ: Հետևաբար, յուրաքանչյուր հանգույց սովորաբար ունի միայն լոկալ տեղեկություն ցանցի կառուցվածքի մասին: Այս համատեքստում մեծ կարևորություն է ներկայացնում ինֆորմացիայի տարածման/փոխանակման ստոխաստիկ ու քվադի-ստոխաստիկ պրոցեսների մոդելների հետազոտությունը: Մյուս կողմից, ինֆորմացիայի լրիվ փոխանակման ցանցերի հիմնական բնութագրիչների օպտիմալ արժեքների վերաբերյալ հստակ պատկերացում ստանալու, ինչպես նաև ինֆորմացիայի տարածման համապատասխան ալգորիթմների մշակման համար անհրաժեշտ է իրականացնել ցանցերում ինֆորմացիայի փոխանակման դետերմինացված պրոցեսների հետազոտություն:

Բնութագրիչների օպտիմալացման տեսանկյունից հետաքրքրություն են ներկայացնում ցանցում լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման համար անհրաժեշտ ժամանակը, զանգերի թիվը, օգտագործվող կապուղիների թիվը և այլն:

Համակարգերում ինֆորմացիայի լիարժեք տարածման/փոխանակման հիմնարար խնդիրների դաս են gossip և broadcast սխեմաները: Այս մոտեցումը ներառում է այնպիսի հաղորդակցման սխեմաներ, որոնցում հանգույցները միմյանց հետ ինֆորմացիայի փոխանակումների միջոցով կարողանում են մյուսներին փոխանցել իրենց ունեցած ինֆորմացիան: Յուրաքանչյուր հաղորդակցման ժամանակ երկու հանգույցներ փոխանակում են իրենց մոտ կուտակված ամբողջ ինֆորմացիան:

Gossip (բամբասանք կամ full-duplex) սխեմայում կապի երկու կողմերը միաժամանակ փոխանակում են ինֆորմացիա, մինչդեռ broadcast (հեռարձակում կամ half-duplex) ռեժիմում հաղորդակցությունը դիտարկվում է որպես միակողմանի փոխանցում: Բացի այդ, տարբերակվում են միաժամանակյա բազմակողմ (բարձրաձայնման, shouting) և զույգային (շշուկային, whispering) հաղորդակցման տեսակները: Առաջինում հանգույցը կարող է մեկ տակտում հաղորդակցվել միաժամանակ բոլոր հարևանների հետ, իսկ երկրորդում՝ միայն մեկ հարևանի հետ: Դիտարկվող խնդիրներում հիմնական ուշադրությունը դարձվում է full-duplex whispering տիպի մոդելներին, որոնք առավել մոտ են հեռախոսային զանգեր կատարելու միջոցով դասական gossip ձևակերպմանը:

Լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման դասական խնդրի հիմքում ընկած է այսպես կոչված հեռախոսային զանգերի խնդիրը, որտեղ n մասնակիցներից յուրաքանչյուրն ունի իր սկզբնական ինֆորմացիան, և անհրաժեշտ է զանգերի հաջորդականության միջոցով ապահովել, որ վերջում յուրաքանչյուր մասնակից տիրապետի ամբողջ ինֆորմացիային: Այս խնդրի մաթեմատիկական ձևակերպումը և զանգերի նվազագույն քանակի ուսումնասիրությունը սկսվել են [187]-[190] աշխատանքներում: Դրանցում ձևավորվել է դասական արդյունքը, ըստ որի դասական gossip խնդրում $n \geq 4$ մասնակիցների համար լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման համար անհրաժեշտ զանգերի նվազագույն քանակը հավասար է $2n - 4$: Հետագայում այս խնդիրը զարգացվել է տարբեր ուղղություններով՝ կապվելով գրաֆների և դիգրաֆների վրա հաղորդակցության խնդիրների, ինֆորմացիայի տարածման ժամանակային բնութագրերի և ընդհանուր gossip խնդրի հետ [191]-[193]: Ավելի վաղ աշխատանքներում ուսումնասիրվել են հաղորդակցության կառուցվածքների, ինֆորմացիայի տարածման ժամանակի և կապերի մատրիցային նկարագրության

հարցերը, որոնք կարևոր նախապատմություն են հանդիսացել gossip և broadcast սխեմաների գրաֆային մոտեցումների համար [194] - [197]:

Դասական հեռախոսային կամ gossip խնդրի հետագա զարգացումը կապված է ոչ միայն կանչերի նվազագույն քանակի, այլև սխեմայի կառուցվածքային սահմանափակումների և ինֆորմացիայի լրիվ փոխանակումը իրականացնելու ժամանակի օպտիմալացման հետ: Այս ուղղությամբ կարևոր դեր ունեն [198] - [201] աշխատանքները, որտեղ ձևակերպվել են ինֆորմացիայի տարածման կառուցվածքի վրա լրացուցիչ սահմանափակումներով սխեմաներ: Նման օրինակներից են NOHO (No One Hears Own information) և NoDup (No Duplicate transmissions) տիպի gossip սխեմաները: Առաջին դեպքում պահանջվում է, որ ոչ մի մասնակից ինֆորմացիայի փոխանակման ընթացքում հետ չստանա իր սեփական սկզբնական ինֆորմացիան, իսկ երկրորդ դեպքում բացառվում են նույն ինֆորմացիայի կրկնակի փոխանցումները: Նշենք, որ այդպիսի սխեմաների հիմնական բնութագրիչների հստակ գնահատման և կառուցվածքային դասակարգման հարցերը դեռ մինչև վերջ լուծված չեն:

Պահանջվող ժամանակի և կանչերի թվի միաժամանակյա սահմանափակումներով gossip խնդիրները ուսումնասիրվել են [202] աշխատանքում, իսկ [203] - [204] աշխատանքներում հետազոտվել են նվազագույն չափի gossip գրաֆները և դրանց միջուկային (kernel) կառուցվածքները: [205] - [208] աշխատանքներում զարգացվել են quick gossip սխեմաները, այդ թվում՝ առանց կրկնվող փոխանցումների և conference calls [209] մոդելներում: Այս ուղղության հետ կապված մի շարք բաց խնդիրներ համակարգված ձևով ներկայացվել են [210] աշխատանքում:

Ժամանակակից բաշխված համակարգերում gossip ալգորիթմները (gossip protocol [211]) լայնորեն կիրառվում են ինֆորմացիայի տարածման, բաշխված հաշվարկների, ագրեգացման, բաշխված տվյալների կրկնօրինակների համաժամեցման (synchronization) և ցանցային հանգույցների վիճակի տարածման խնդիրներում: Այս ալգորիթմների ընդհանուր տեսությունը և կիրառությունների շրջանակը համակարգված կերպով ներկայացված են [212] ակնարկային աշխատանքում: Գործնական համակարգերում այս մոտեցումը իրականացվել է մի շարք ծրագրային փաթեթների միջոցով, օրինակ՝ Apache Gossip [213], gossip-python [214] և Smudge [215]:

[216] - [223] աշխատանքներում ուսումնասիրվել են broadcasting և gossiping խնդիրները հաղորդակցական ցանցերում: Հիմնական ուշադրությունը դարձվել է նվազագույն broadcast գրաֆների կառուցմանը, դրանց դասակարգմանը, ինֆորմացիայի տարածման ժամանակի և կապերի քանակի օպտիմալ գնահատականներին, ինչպես նաև հատուկ տոպոլոգիաների՝ de Bruijn, shuffle-exchange և նմանատիպ ցանցերի վրա ինֆորմացիայի տարածման արդյունավետ սխեմաներին:

Գրաֆների կապակցվածության և անկախ ուղիների տեսության հիմքում ընկած Մենգերի դասական թեորեմը [224] ցույց է տալիս, որ երկու գագաթների միջև կողերով չհատվող անկախ ուղիների առավելագույն քանակը հավասար է կողերի նվազագույն քանակով այն բազմության չափին, որի հեռացումը գրաֆից խզում է կապը տվյալ երկու գագաթների միջև: Այս թեորեմը կարևոր տեսական հիմք է հանդիսանում k խափանումների (k -fault-tolerant) նկատմամբ դիմակայուն gossip և broadcast սխեմաների ուսումնասիրության համար: Մասնավորապես՝ $k = 0$ դեպքը

համապատասխանում է դասական gossip խնդրին: k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip խնդրում պահանջվում է կառուցել այնպիսի զանգերի հաջորդականություն (չկրկնվող ամբողջ թվերով պիտակավորված գրաֆ), որը ապահովում է լրիվ ինֆորմացիայի տարածում՝ կամայական ամենաշատը k ձախողված զանգերի դեպքում: Կողի պիտակը (label) իրենից ներկայացնում է ժամանակի այն պահը, երբ իրականացվել է այդ կողին կից գազաթների միջև զանգ: Նշենք, որ երկու գազաթ կարող է միացված լինել տարբեր պիտակներ ունեցող մի քանի կողերով: Մի գազաթից մյուսին ինֆորմացիայի փոխանցման հետագիծը իրենից ներկայացնում է այդ գազաթները միացնող ածող ճանապարհ, այսինքն՝ այնպիսի ճանապարհ, որի կողերի պիտակները դասավորված են աճման կարգով: Մենգերի թեորեմի անալոգիայով՝ k խափանումների նկատմամբ դիմակայունության փաստը համարժեք է նրան, որ կամայական երկու գազաթների միջև կան իրար հետ չհատվող ածող ճանապարհներ: Առանց ընդհանրությունը խախտելու և ստացվող սխեման փոփոխելու կարելի է ենթադրել որ իրար ոչ կից կողերի պիտակները կարող են կրկնվել: Դա համարժեք է այնպիսի համակարգին, որտեղ չնայած ամեն զանգին մասնակցում են երկու կից գազաթներ, սակայն զանգերը կատարվում են զուգահեռ, քանի որ համապատասխան միևնույն պիտակով կողերը չեն հատվում: Այս ձևակերպմամբ n գազաթներով k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip գրաֆում սովորաբար դիտարկվում են

- $\tau(n, k)$ ՝ անհրաժեշտ մինիմալ զանգերի թիվը,
- $T(n, k)$ ՝ ծախսված մինիմալ ժամանակը (տակտերի թիվը), այսինքն իրարից տարբեր պիտակների թիվը,
- $E(n, k)$ ՝ մինիմալ կապուղիների քանակը, այսինքն այն գազաթային զույգերի թիվը որոնց միջև նախատեսված է կատարել զանգեր

Ժամանակային օպտիմալացման տեսանկյունից պարզ ստորին գնահատականը ստացվում է այն փաստից, որ յուրաքանչյուր տակտում տվյալ մասնակցի մոտ առկա ինֆորմացիայի քանակը կարող է առավելագույնը կրկնապատկվել: Ուստի լրիվ ինֆորմացիայի տարածման համար անհրաժեշտ տակտերի թիվը չի կարող փոքր լինել

$$T(n) \geq \lceil \log_2 n \rceil:$$

Քնդդեմի գրաֆների [225] և դրանց հետ կապված կառուցումների միջոցով որոշ դասերի համար հնարավոր է հասնել այդ նվազագույն ժամանակին [226]–[227], այսինքն՝ կառուցել սխեմաներ, որոնցում

$$T(n) = \lceil \log_2 n \rceil:$$

Մյուս կողմից, եթե լրացուցիչ պահանջվում է, որ կանչերի ընդհանուր քանակը նույնպես լինի նվազագույն՝ $2n - 4$, ապա հայտնի են ավելի խիստ ժամանակային սահմանափակումներ: Այդ ուղղությամբ Լաբանի աշխատանքներում ճշտվել են նվազագույն չափի gossip գրաֆների (MGG, Minimum Gossip Graph) կառուցվածքային հատկությունները և ժամանակային բնութագրիչները [203], [204].

$$T_{\text{MGG}}(n) \geq 2\lceil \log_2 n \rceil - 3:$$

Խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմաների դեպքում խնդիրը էապես բարդանում է: $\tau(n, k)$ և $T(n, k)$ մեծությունների համար տարբեր հեղինակների կողմից ստացվել են ինչպես ստորին, այնպես էլ վերին գնահատականներ: Բերմանի և Հավրիլիչի աշխատանքում [228] ստացվել էր ընդհանուր վերին գնահատական

$$\tau(n, k) \leq \left\lceil \left(k + \frac{3}{2} \right) (n - 1) \right\rceil:$$

Հետագայում այդ գնահատականը բարելավվել են Հադդադ, Ռոյ, Շաֆեր [229]; Հոու, Շիգենո [230] և Հասունումա, Նագամոչի [231] հեղինակային խմբերի աշխատանքներում: Մասնավորապես, հայտնի էին դարձել հետևյալ ասիմպտոտիկ սահմանները՝

$$\frac{nk}{2} + \Omega(n) \leq \tau(n, k) \leq \frac{nk}{2} + O(n \log n):$$

Broadcast սխեմաների համար խափանումների նկատմամբ դիմակայունության խնդիրները նույնպես լայնորեն ուսումնասիրվել են [232]–[238], իսկ այլ ընդհանրացումները ներառում են հիպերգրաֆային gossip խնդիրը, ծառերի վրա telephone/gossip խնդիրները, ինչպես նաև telegraph և messy broadcasting մոդելները [239]–[245]:

2.2. Հիմնական արդյունքները

Սույն ատենախոսությանն ներկայացված աշխատանքներում զարգացվել է gossip սխեմաների տեսությունը և ստացվել են հաղորդակցման հիմնական բնութագրիչների համար վերին գնահատականներ: Բնութագրիչների նվազագույն արժեքների համար առաջադրվել են հիպոթեզներ, որոնք ստուգվել են թվային մեթոդներով, իսկ մի շարք դեպքերում ներկայացվել են անալիտիկ ապացույցներ: Ստացված արդյունքները հիմք են հանդիսանում վթարակայուն և արդյունավետ հաղորդակցային սխեմաների նախագծման համար:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում ներկայացվում են հեղինակի կողմից և համահեղինակությամբ հրատարակված հետևյալ արդյունքները:

- [285] հողվածում gossip խնդիրների ուսումնասիրության համար ներմուծվել է լոկալ փոխանցման (local interchange) մեթոդը: Այս մեթոդը հիմնված է պիտակավորված gossip գրաֆի ընտրված կողերի վրա permute higher և permute lower գործողությունների հաջորդական կիրառման վրա: Արդյունքում տրված gossip գրաֆը արտապատկերվում է մեկ այլ gossip գրաֆի՝ տեղափոխելով միայն դրա կողերը և չփոխելով կողերի պիտակները, այսինքն՝ համապատասխան կանչերի պահերը: Օգտագործելով այս մեթոդը՝ Քնյոդելի գրաֆների վրա հիմնված gossip գրաֆներից մեր կողմից ստացվել են նվազագույն ժամանակով gossip գրաֆներ,

որոնցում ոչ ոք չի լսում սեփական ինֆորմացիան (NOHO գրաֆներ): Նվազագույն ժամանակի արժեքն է

$$T_{\text{NOHO}}(n) = \lceil \log_2 n \rceil:$$

Այս արդյունքը լուծում է մի շարք հեղինակների կողմից առաջադրված բաց խնդիրը, որը ներառված էր նաև Լիստմանի կողմից ձևակերպված բաց խնդիրների շարքում [210]: Փաստացի ցույց տրվեց, որ NOHO սահմանափակումը չի մեծացնում gossip գրաֆի նվազագույն ժամանակը:

Լոկալ փոխատեղման մեթոդը նաև մեզ հնարավորություն է տվել գտնելու այլընտրանքային ապացուցման եղանակ այն փաստի համար, որ gossip սխեմաներում նվազագույն անհրաժեշտ կանչերի քանակը հավասար է

$$\tau(n) = 2n - 4, \quad n \geq 4:$$

Լոկալ փոխատեղման մեթոդի կիրառմամբ մոտեցման առավելությունն այն է, որ հնարավոր է ուսումնասիրել gossip սխեմաների ամբողջ ընտանիքներ՝ ստանալով նոր սխեմաներ արդեն հայտնի լուծումներից լոկալ ձևափոխությունների միջոցով: Արդյունքում լոկալ փոխատեղման մեթոդի միջոցով կառուցվել են որոշակի լրացուցիչ պայմաններին բավարարող օպտիմալ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմաներ:

- [286] աշխատանքում մշակվել է Graph Plotter գրաֆիկական ծրագրային գործիքը, որը նախատեսված է պարզ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմաների կառուցման, պատկերման, խմբագրման և հետազոտման համար: Ծրագիրը հնարավորություն է տալիս վիզուալ ձևով ներկայացնել ինֆորմացիայի տարածման սխեմաները, ստուգել դրանց gossip հատկությունները, մոդելավորել կապերի խափանումները և հաշվարկել խափանումների նկատմամբ դիմակայունության հատկությունները:

Graph Plotter-ը ներառում է աշխատանքի մի քանի ռեժիմներ՝ նախատեսված gossip խնդրի տարբեր ձևակերպումների համար, այդ թվում՝ դասական gossip հատկության և k -վթարակայունության ստուգումը; broadcast, NOHO, NoDup և երեք Messy մոդելների broadcast սխեմաների վավերացումը; ինչպես նաև «կտրված» ճանապարհների (folded paths) ու broadcast ենթասխեմաների հայտնաբերման հնարավորությունները և այլն:

Ծրագիրը հնարավորություն է տալիս կառուցել ոչ միայն առանձին գրաֆներ, այլև գեներացնել գրաֆների ամբողջ ընտանիքներ՝ պարամետրերի տարբեր արժեքների համար: Այս համատեքստում կարևոր հետաքրքրություն ներկայացնող գրաֆների ընտանիքներ են Քնյոդելի և անիվային գրաֆները: Բացի գրաֆների կառուցումից և գեներացումից, ծրագիրը հնարավորություն է տալիս կատարել նաև դրանց կառուցվածքային ձևափոխություններ: Մասնավորապես, իրականացված է լոկալ փոխատեղման գործողությունը:

Graph Plotter-ի միջոցով ստացված թվային և վիզուալ արդյունքները օգտագործվել են նոր կառուցվածքների որոնման, առաջադրված հիպոթեզների ստուգման և տեսական ապացույցների ձևավորման փուլերում:

- [287] և [288] աշխատանքներում ուսումնասիրվել է Քնյոդելի գրաֆների կիրառությունը k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմաների կառուցման համար՝ լրիվ ինֆորմացիայի տարածման և ԱԹՍ-ների երամներում հուսալի հաղորդակցության ապահովման խնդիրների համատեքստում: Օգտագործելով Քնյոդելի գրաֆների սիմետրիայի հատկությունները և գրաֆներում տվյալ գազաթից սկսվող աճող ճանապարհների հատկությունները՝ կառուցվել են Քնյոդելի գրաֆների հիման վրա նոր սխեմաներ: Արդյունքում առաջ է քաշվել այն հիպոթեզը, որ կառուցված սխեմաները ապահովում են լրիվ ինֆորմացիայի տարածումը նույնիսկ մինչև k կապերի խափանման դեպքում: Այդ հիպոթեզը ապացուցվել է մի շարք կարևոր մասնակի դեպքերի համար. կամայական k -ի դեպքում՝ $n = 2^p$ և $n = 2^p - 2$, $p = 1, 2, \dots$ տեսքի գազաթների քանակների համար, ինչպես նաև $k = 1$ դեպքում՝ կամայական զույգ n -ի համար: Ստացված կառուցումները պահանջում են ավելի փոքր թվով կանչեր նախորդ հայտնի վերին գնահատականների համեմատ, ինչի արդյունքում զույգ n -երի դեպքում $\tau(n, k)$ մեծության համար ստացվել է ավելի ճշգրտված վերին գնահատական՝

$$\tau(n, k) \leq \frac{1}{2}n[\log_2 n] + \frac{nk}{2}:$$

Միաժամանակ կատարվող անկախ կանչերի մոդելում լրիվ ինֆորմացիայի տարածման նվազագույն ժամանակի համար առկա է հայտնի ստորին գնահատական [229], [235]: Այդ գնահատականը համադրելով k խափանումների նկատմամբ դիմակայունության վերաբերյալ ձևակերպված հիպոթեզի հետ՝ զույգ n -երի համար ստացվում է նվազագույն ժամանակի հետևյալ ճշգրիտ արժեքը՝

$$T(n, k) = [\log_2 n] + k:$$

Բացի տեսական հետազոտություններից, կատարվել է նաև ձևակերպված հիպոթեզի համակարգչային ստուգում՝ պարամետրերի լայն տիրույթի համար: Օգտագործվել են Graph Plotter ծրագրային գործիքը և Քնյոդելի գրաֆների համար հատուկ օպտիմալացված ծրագիրը: Հիպոթեզը ստուգվել է Քնյոդելի գրաֆների համար՝ ընդհուպ մինչև $n \leq 2^{12}$ գազաթների թիվը և մինչև $k \leq 7$ խափանումների նկատմամբ դիմակայունության աստիճանը:

Յույց է տրվել նաև, որ պարզ gossip սխեմաների համար մեր կողմից ներմուծված լոկալ փոխատեղման գործողության հատկությունը պահպանվում է նաև Քնյոդելի գրաֆների հիման վրա կառուցված սխեմաներում $k = 1$ համար:

Ստացված արդյունքները հնարավորություն են տալիս Քնյոդելի գրաֆների հիման վրա կառուցված սխեմաները կիրառել ԱԹՍ-ների երամներում խափանումների նկատմամբ դիմակայուն ինֆորմացիայի տարածման խնդիրներում:

- [289] աշխատանքում կառուցվել և ուսումնասիրվել են անիվային գրաֆների վրա հիմնված k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip գրաֆներ: Անիվային գրաֆը W_n ներկայացվում է որպես $n - 1$ երկարությամբ արտաքին ցիկլից և մեկ կենտրոնական գագաթից կազմված գրաֆ, որտեղ կենտրոնական գագաթը միացված է ցիկլի բոլոր գագաթներին: Անիվային գրաֆների հիման վրա կառուցվել են k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմաներ: Ստացված արտահայտություններից հետևում է մինիմալ կողերի համար ավելի ճշգրտված վերին գնահատական՝

$$\tau(n, k) \leq \frac{2}{3}nk + O(n):$$

- [290]-[291] աշխատանքում ձևակերպվել և քննարկվել են gossip և broadcast սխեմաների մի շարք բաց խնդիրներ, ինչպես նաև ուսումնասիրվել է լոկալ փոխատեղման մեթոդի կիրառման հնարավորությունը ավելի լայն համատեքստում՝ որպես բաց խնդիրների հետազոտման և հնարավոր օպտիմալ կառուցումների որոնման գործիք: Մասնավորապես, դիտարկվել է խափանումների նկատմամբ դիմակայունության տրված աստիճանով լրիվ ինֆորմացիայի տարածման համար տակտերի թվի և օգտագործվող կապերի քանակի միաժամանակյա օպտիմալացման խնդիրը:

Դիտարկվել է նվազագույն gossip գրաֆների (գրականության մեջ հայտնի որպես MGG, Minimum Gossip Graph) կառուցման նոր մեթոդ՝ հիմնված լոկալ փոխատեղման գործողության կիրառության վրա: Կառուցված գրաֆների յուրահատկությունը կայանում է նրանում, որ դրանք ունեն նվազագույն հնարավոր կողերի քանակ (gossip սխեմայում զանգերի քանակ)՝ $2n - 4$, և միաժամանակ ապահովում են լրիվ gossip իրականացնելու նվազագույն ժամանակ այդպիսի կանչերի քանակի պայմաններում: Մասնավորապես, գրաֆների տակտերի քանակը համընկնում է Լաբանի կողմից ստացված ստորին գնահատականի հետ

$$T_{\text{MGG}}(n) \geq 2\lceil \log_2 n \rceil - 3:$$

Դիտարկված կառուցման մեթոդում սկզբում ընտրվում է հիմքային գրաֆ, որն ունի կողերի նվազագույն հնարավոր քանակ: Մնացած գագաթները ներգրավվում են gossip պրոցեսում՝ կազմելով ծառանման կցումներ, որոնց արմատները հանդիսանում են հիմքային գրաֆի որոշ գագաթներ: Այս կառուցման մեջ հիմնական խնդիրը հիմքային գրաֆի տարբեր չափերի համար տակտերի նվազագույն հնարավոր թվի ապահովումն է: Այդ նպատակով հայտնի NOHO տիպի մոդելի վրա կիրառվում է լոկալ փոխատեղման գործողությունը, և արդյունքում ստացվում է «կանոնիկ» տեսքի գրաֆ: Ցույց է տրվում, որ առաջարկվող մեթոդով կառուցված gossip գրաֆների համար լրիվ ինֆորմացիայի տարածման ժամանակը

$$2^p \leq n \leq 2^p + 2^{p-1}, \quad p \geq 3:$$

միջակայքերում գտնվող n -երի համար համընկնում է ստորին գնահատականի հետ:

- [292] աշխատանքում ուսումնասիրվել են կողերի պիտակների ցիկլիկ տեղափոխությամբ ստացված Քնյոդելի գրաֆների (edge-permuted Knödel graphs) gossip հատկությունները: Աշխատանքում ցույց է տրվել, որ կողերի որոշ տեղափոխություններ պահպանում են Քնյոդելի գրաֆների gossip հատկությունները և կարող են օգտագործվել լրիվ ինֆորմացիայի տարածման նոր սխեմաների կառուցման համար: Այս աշխատանքը նաև լրացնում է լոկալ փոխատեղման մոտեցումը՝ կիրառելով այն Քնյոդելի գրաֆների կառուցվածքային ձևափոխությունների ուսումնասիրության համար:

3. ԹՎԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՄԱՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ, ՀԱՇՎԱՐԿԱՅԻՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ԵՎ ԻՆՔՆԱՎԱՐ ԱԹՍ-ՆԵՐԻ ԻՆՔՆԱԿԱԶՄԱԿԵՐՊՎՈՂ ԱՊԱԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԵՐԱՄՆԵՐԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄ

Այս բաժնում ներկայացվում են ատենախոսության թեմայի շրջանակներում կիրառված թվային մոդելավորման մեթոդները, մշակված հաշվարկային ալգորիթմները և դրանց կիրառությունը ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների նախագծման ու կառավարման խնդիրներում: Հիմնական շեշտը դրվում է մշակված ծրագրա-ապարատային համակարգի և ամպային բնույթի (cloud-native) բազմաօգտատեր հարթակի վրա, որի միջոցով իրականացվում են ԱԹՍ-ների երամային առաքելությունների նախագծումը, նախնական սիմուլյացիան, կատարման վերահսկումը, հեռաչափական տվյալների մշակումը և արդյունքների վերլուծությունը:

Նախորդ բաժիններում ներկայացված մոլտիէլեյրյան ծածկույթ ապահովող rotor-router մոդելի, և տեղեկատվության տարածման gossip/broadcast մեխանիզմների վերաբերյալ ստացված արդյունքները այս բաժնում ընդհանրացվել և ադապտացվել են՝ ծառայելով որպես մշակված հարթակի ալգորիթմական հիմք: Մասնավորապես՝ դրանք ներառվել են որպես ԱԹՍ-ների լոկալ որոշումների ընդունման, տարածքի դետերմինիստական/քվազիդետերմինիստական ծածկման, առաջադրանքների բաշխման, խափանումներից հետո ավտոմատ վերակազմակերպման և հուսալի հաղորդակցության գործառնական մեխանիզմներ: Տեղեկատվության տարածման և խափանումադիմացկուն հաղորդակցության տեսանկյունից gossip և broadcast սխեմաները թույլ են տալիս կազմակերպել տվյալների բաշխված տարածում, պահպանել համակարգի իրազեկվածությունը մասնակի կապի կորստի կամ հանգույցների խափանման պայմաններում և նվազեցնել կախվածությունը կենտրոնացված հանգույցներից: ԱԹՍ-ների երամների համար այս մեխանիզմները կարող են օգտագործվել առաքելության վիճակի, սինխրոնացման կետերի, հեռաչափության և խափանումների մասին տեղեկատվության փոխանակման համար՝ լրացնելով rotor-router հիմքով կոորդինացման դետերմինիստական մեխանիզմները: Մյուս կողմից, դետերմինիստական կոորդինացման rotor-router մոդելի վրա հիմնված մոտեցումները, կարևոր առավելություն ունեն ԱԹՍ-ների երամների տարածքային

ծածկման խնդիրներում: Դրանք ապահովում են տարածքի ծածկման ընթացքում արդեն այցելված հատվածների կրկնակի մշակման բացառում, գլոբալ սինխրոնացումից անկախություն և որոշակի իմաստով կանխատեսելի վարք:

3.1. Արդի վիճակի վերլուծություն

ԱՐԹՍ-ների երամների նախագծումն ու գործառնական կառավարումը ժամանակակից բազմաազենտային և կիբերֆիզիկական համակարգերի արագ զարգացող ուղղություններից են: Այս ոլորտում առկա աշխատանքները ընդգրկում են ինքնակազմակերպման տեսական հիմքերը, երամային կոորդինացումը, երթուղու պլանավորումը, ամպային և եզրային հաշվարկները, խափանումադիմացկուն հաղորդակցությունը, տվյալների կառավարումը և անվտանգության մեխանիզմները: Դրանց համատեղ դիտարկումը կարևոր է, քանի որ իրական առաքելություններում այս բաղադրիչները գործում են ոչ թե մեկուսացված, այլ փոխկապակցված համակարգային միջավայրում:

Ինքնակազմակերպվող համակարգերի տեսական հիմքերը լայնորեն ուսումնասիրվել են բարդ ադապտիվ համակարգերի, բազմաազենտային մոդելների և peer-to-peer ցանցերի համատեքստում: P2P համակարգերը դիտարկվում են որպես լայնածավալ, դինամիկ և ապակենտրոնացված համակարգեր, իսկ կոոպերատիվ ինքնակազմակերպման մոտեցումներում գործակալները կարող են լուրջ մակարդակում փոփոխել իրենց փոխազդեցությունները՝ ապահովելով համակարգի վերակազմաձևում [246]–[247]: Երամային բանականության մեթոդները կիրառվում են օպտիմալացման, երթուղու որոնման, ժամանակացույցավորման, կառուցվածքային օպտիմալացման և տվյալների վերլուծության խնդիրներում [248]:

ԱՐԹՍ-ների երամների համար առաջարկված մի շարք մոտեցումներ կենտրոնանում են ապակենտրոնացված մշակման, կառավարման և կոորդինացման վրա: Դիտարկվել են ինքնավար գործընթացներով աշխատող երամային մոդելներ, երթուղիների պլանավորման, առաջադրանքների բաշխման, կլաստերացման, կազմավորման պահպանման և տարածքի ծածկման խնդիրներ [249]–[254]: Այս մոտեցումները կարևոր են երամային համակարգերի գործնական իրականացման համար, սակայն հաճախ կենտրոնանում են առանձին ալգորիթմական բաղադրիչների վրա՝ առանց առաքելության ամբողջական կենսացիկլի միասնական դիտարկման:

Վերջին տարիներին ԱՐԹՍ-ների երամների պլանավորման և կոորդինացման խնդիրներում կիրառվում են նաև օպտիմալացման և մեքենայական ուսուցման մեթոդներ: Որոշ աշխատանքներում երթուղու պլանավորման խնդիրը դիտարկվում է մի քանի նպատակների օպտիմալացման տեսանկյունից՝ ռիսկերի գնահատման և ամրապնդմամբ ուսուցման մեխանիզմներով, իսկ այլ աշխատանքներում ուսումնասիրվում է երամի հաղորդակցական թողունակության առավելագույնացման խնդիրը [255]–[256]: Այդ մոտեցումները կարևոր են առանձին օպտիմալացման խնդիրների համար, սակայն կոորդինացումը, կապի ենթակառուցվածքը և առաքելության ամբողջական կենսացիկլը հաճախ դիտարկվում են առանձին, ոչ թե միասնական համակարգի կազմում:

Ամպային և եզրային հաշվարկների կիրառումը ԱԹՍ-ների համակարգերում նույնպես լայնորեն զարգացող ուղղություն է: Առանց սերվեր հաշվարկների (Serverless), գործառնությունը որպես ծառայություն (Function-as-a-Service) և կոնտեյներացված միկրոծառայությունների կառավարման (orchestration) մոտեցումները հնարավորություն են տալիս ապահովել ճկուն մասշտաբավորում (scalability), ծառայությունների աշխատանքային վիճակի վերահսկում, փուլային թարմացումների իրականացում և հաշվարկային բեռների դինամիկ բաշխում: [257] - [258]: Միևնույն ժամանակ, ամպային միջավայրերի և ԱԹՍ-ների իրական գործառնական պայմանների միջև առկա է էական տարբերություն. ամպային համակարգերը սովորաբար ենթադրում են հուսալի կապ և հասանելի ռեսուրսներ, մինչդեռ ԱԹՍ-ների երամները գործում են սահմանափակ էներգիայի, անկայուն կապուղիների և լոկալ հաշվարկային սահմանափակումների պայմաններում [259] - [260]:

Աշխատանքային հոսքերի ժամանակացույցավորման, օրկեստրավորման և սիմուլյացիոն միջավայրերի ուսումնասիրությունները կարևոր հիմք են ապահովում ամպային աջակցությամբ առաքելությունների համար [261] - [262]: Սակայն նման համակարգերը սովորաբար դիտարկում են աշխատանքային հոսքերը որպես նախապես սահմանված և հարաբերականորեն ստատիկ կառուցվածքներ: Դրանք բավարար չափով չեն աջակցում այնպիսի սցենարներ, որտեղ տարբեր դերեր ունեցող օգտատերեր համատեղ նախագծում, խմբագրում, սիմուլացնում և վերակոմպիլացնում են առաքելությունը փոփոխվող պահանջների պայմաններում:

Տվյալների կառավարման, հետևողականության և անվտանգության խնդիրները նույնպես կարևոր են ամպային աջակցությամբ երամային համակարգերի համար: NoSQL բաշխված տվյալների բազաների հետևողականության մոդելներում ուսումնասիրվել են կատարողականության և ճիշտության միջև փոխզիջումները [263], իսկ IoT համակարգերի համար դիտարկվել են թողունակության սահմանափակումների պայմաններում ամպային offloading-ի ռազմավարություններ [264]: ԱԹՍ-ների երամային առաքելություններում տվյալների տարբեր տեսակները ունեն տարբեր պահանջներ. կոորդինացման սահմանափակումները, թիմային դերերը և կոմպիլացված պլանները պահանջում են խիստ հետևողականություն, մինչդեռ բարձր հաճախականությամբ հեռաչափական հոսքերը կարող են որոշ դեպքերում հանդուրժել վերջնական հետևողականություն, ուշացում կամ մասնակի կորուստ:

Անվտանգության տեսանկյունից ԱԹՍ-ների երամային համակարգերը պահանջում են պաշտպանված հաղորդակցություն, վստահելի նույնականացում և առաքելության տվյալների պաշտպանություն: Առկա հետազոտություններում դիտարկվել են ինչպես ամպային միջավայրերի բազմավարձակալության և մեկուսացման խնդիրները, այնպես էլ ԱԹՍ-ների միջև անվտանգ հաղորդակցության և աուθενտիկացման մեխանիզմները [265]: Սակայն իրական երամային համակարգերի համար անվտանգության մեխանիզմները պետք է ինտեգրվեն ոչ միայն հաղորդակցական շերտում, այլև առաքելության պլանավորման, օգտատերերի դերերի կառավարման, բանալիների նախաբաշխման և ամպ-եզր փոխգործակցության մեջ:

Այսպիսով, առկա աշխատանքների վերլուծությունը ցույց է տալիս, որ ԱԹՍ-ների երամների ոլորտում առանձին-առանձին լավ ուսումնասիրված են կոորդինացման

ալգորիթմները, երթուղու պլանավորումը, ամպային հաշվարկները, խափանումադիմացկուն հաղորդակցությունը, տվյալների կառավարումը և անվտանգությունը: Սակայն դրանց մեծ մասը չի ապահովում միասնական ճարտարապետական շրջանակ, որտեղ առաքելության նախագծումը, դետերմինիստական կոորդինացումը, սիմուլյացիոն վավերացումը, իրական ժամանակի վերահսկումը, տվյալների մշակումը և խափանումներից հետո վերակազմակերպումը դիտարկվում են որպես մեկ ամբողջական կենսացիկլի բաղադրիչներ: Նշված սահմանափակումը հիմք է ստեղծում ամպային բնույթի բազմօգտատեր հարթակի մշակման համար, որտեղ դետերմինիստական rotor-router կոորդինացումը, gossip/broadcast տեղեկատվության տարածումը, միկրոճառայությունների ճարտարապետությունը, կենդանի հեռաչափության վրա հիմնված վերահսկումը և անվտանգության մեխանիզմները դիտարկվում են համադրված ձևով:

3.2. Ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների նախագծման հիմքում ընկած մաթեմատիկական մոդելները

Ատենախոսության տեսական արդյունքների կիրառման համար հիմք են հանդիսանում երկու հիմնական ուղղություններով ստացված մաթեմատիկական և ալգորիթմական արդյունքները: Առաջին ուղղությունը վերաբերում է rotor-router մոդելին, Էյլերյան և մուլտիԷյլերյան դեգերումներին, մեր կողմից ապացուցված ցիկլերի դարձելության թեորեմի [281],[298],[306] և դրանց հիման վրա տարածքի դետերմինիստական կամ քվազիդետերմինիստական ծածկման ալգորիթմների կառուցմանը: Երկրորդ ուղղությունը վերաբերում է լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման օպտիմալ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն սխեմաներին՝ մասնավորապես gossip և broadcast մոդելներին, Քնյոդելի գրաֆներին, լոկալ փոխատեղման մեթոդին և դրանց կիրառությանը ինքնակազմակերպվող ԱԹՍ-ների երամների հուսալի հաղորդակցության համար [289] - [290], [307]:

Դիտարկենք ուղղորդված գրաֆ՝ դիգրաֆ, $G = (V, E)$, որտեղ $V = V(G)$ -ն գրաֆի գագաթների, իսկ $E = E(G)$ -ն՝ ուղղորդված կողերի բազմությունն է: Ենթադրում ենք, որ G -ում չկան օղակներ (self-loop), այսինքն՝ գագաթը ինքն իրեն միացնող կողեր:

Եթե v գագաթից դեպի w գագաթ ուղղված յուրաքանչյուր կողի համար գոյություն ունի նաև հակառակ՝ w -ից դեպի v ուղղված համապատասխան կող, ապա G գրաֆը կանվանենք երկուողորդված: Երկուողորդված գրաֆ կարելի է ստանալ չուղղորդված գրաֆից՝ նրա յուրաքանչյուր կողը փոխարինելով երկու հակադիր ուղղություններով ուղղորդված կողերով: Երկուողորդված G գրաֆի ծածկող ենթագրաֆ G' կոչվում է այնպիսի դիգրաֆ, որի գագաթների բազմությունը $V(G') = V(G)$, իսկ կողերի բազմությունը՝ $E(G') \subseteq E(G)$: Տրված $a \in V$ գագաթից դեպի $b \in V$ գագաթ տանող n երկարությամբ ճանապարհ կոչվում է իրարից տարբեր գագաթների հաջորդականությունը՝ $v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$, որի համար v_i և v_{i+1} գագաթները միացված են $e_i \in E$ կողով, $i = 1, 2, \dots, n$, ընդ որում $v_1 = a$ և $v_{n+1} = b$: Եթե $a = b$, ապա ճանապարհը

վերածվում է ցիկլի: Հնարավոր ամենակարճ ցիկլն ունի 2 երկարություն և կազմված է երկու հարևան գագաթներից՝ v_1 և v_2 , որոնք միացված են v_1 -ից դեպի v_2 և հակառակ ուղղությամբ տանող երկու կողերով: Նման ցիկլերը, ցանցային դիմերների հետ համանմանությամբ, կանվանենք դիմերներ: Երկուսից ավելի կողերից կազմված ցիկլը կանվանենք կոնտուր:

Վերջավոր դիգրաֆում էյլերյան շրջանցում կոչվում է այն դեգերումը, որը սկսվում և ավարտվում է նույն գագաթում և յուրաքանչյուր ուղղորդված կողով անցնում է ճիշտ մեկ անգամ: Եթե նման դեգերում գոյություն ունի, ապա դիգրաֆը կոչվում է էյլերյան: Դիգրաֆը կոչվում է խիստ կապակցված, եթե ցանկացած երկու տարբեր v և w գագաթների համար գոյություն ունեն ճանապարհներ ինչպես v -ից դեպի w , այնպես էլ w -ից դեպի v : Խիստ կապակցված $G = (V, E)$ դիգրաֆը էյլերյան է այն և միայն այն դեպքում, երբ յուրաքանչյուր $v \in V$ գագաթի մուտքային և ելքային աստիճանները հավասար են: Մասնավորապես, երկուողորդված կապակցված գրաֆը էյլերյան է:

Ռոտոր-երթուղիչ մոդելը (rotor-router model) սահմանվում է հետևյալ կերպ: Դիտարկենք կամայական կապակցված դիգրաֆ $G = (V, E)$: $v \in V$ գագաթից դուրս եկող կողերի քանակը, այսինքն՝ ելքային աստիճանը, նշանակենք d_v -ով: Այդ դեպքում G գրաֆի կողերի ընդհանուր քանակը տրվում է

$$|E| = \sum_{v \in V} d_v$$

քանաձևով: Յուրաքանչյուր $v \in V$ գագաթին համապատասխանում է ռոտոր, որը ուղղված է v -ից դուրս եկող կողերից մեկի երկայնքով: v գագաթում ռոտորի ուղղությունը նկարագրվում է ամբողջաթիվ α_v փոփոխականով, որը, $d_v \geq 1$ դեպքում, ընդունում է

$$0 \leq \alpha_v \leq d_v - 1$$

արժեքներ: Ռոտորային կոնֆիգուրացիան սահմանվում է

$$\rho = \{\alpha_v \mid v \in V, 0 \leq \alpha_v \leq d_v - 1\}$$

բազմությամբ: Սկզբնական պահին ընտրվում է կամայական ռոտորային կոնֆիգուրացիա և G գրաֆի կամայական գագաթում տեղադրվում է մասնիկ: Ժամանակի յուրաքանչյուր տակտի ընթացքում v գագաթում գտնվող մասնիկը նախ փոխում է այդ գագաթի ռոտորի ուղղությունը՝ α_v -ից դարձնելով

$$(\alpha_v + 1) \bmod d_v,$$

իսկ այնուհետև քայլ է կատարում v -ից նոր ռոտորային ուղղության երկայնքով դեպի հարևան գագաթը:

Ռոտորային ρ կոնֆիգուրացիան կարելի է դիտարկել որպես G գրաֆի ծածկող ենթագրաֆ՝ $\rho \subset G$, որի գագաթների բազմությունն է $V(\rho) = V(G)$, իսկ ուղղորդված կողերի բազմությունը՝ $E(\rho) \subset E(G)$, համընկնում է ռոտորների ուղղություններով որոշված կողերի հետ: Համակարգի վիճակը ժամանակի ցանկացած պահին տրվում է $\rho \subset G$ ռոտորային կոնֆիգուրացիայի և մասնիկի $v \in V$ դիրքի զույգով՝ (ρ, v) : Գրաֆի տրված $v \in V$ գագաթը կոչվում է կլանիչ, եթե նրա ելքային աստիճանը հավասար է

գրոյի, այսինքն՝ $d_v = 0$: Կլանիչների բացակայության դեպքում, երբ յուրաքանչյուր գագաթից դուրս է գալիս առնվազն մեկ կող, մասնիկի շարժումը չի դադարում:

Եթե (ρ, v) վիճակից rotor-router գործողության հաջորդական կիրառումը վերջավոր քայլերից հետո համակարգը վերադարձնում է նույն (ρ, v) վիճակին, ապա այդ վիճակը կոչվում է ռեկուրենտ, հակառակ դեպքում՝ անցողիկ: Ըստ Պրիեզժևի [122]-[123], վերջավոր էյլերյան գրաֆում կամայական սկզբնական (ρ, v) վիճակից սկսված rotor-router դեգերումը նախ անցնում է անցողիկ վիճակներով, ապա մտնում է ռեկուրենտ վիճակների տիրույթ և հետագա շարժումը կատարում է սահմանային պարբերական ուղեծրով (ատրակտորով, attractor), որը հանդիսանում է տվյալ գրաֆի էյլերյան շրջանցում: Rotor-router մոդելի խիստ և ինքնաբավ ներկայացումը տրված է Հորլոյդի և համահեղինակների աշխատանքում [125]:

G դիգրաֆի այն կապակցված ծածկող ենթագրաֆը, որում յուրաքանչյուր գագաթ ունի մեկ ելքային կող, պարունակում է ճիշտ մեկ ցիկլ: (ρ, v) վիճակը կոչվում է ունիցիկլ, եթե $E(\rho)$ կողերի բազմությունը պարունակում է միակ ուղղորդված ցիկլ, և v գագաթը պատկանում է այդ ցիկլին [125] (տես նաև մեր կողմից կատարված [281] աշխատանքը): Այդ դեպքում էյլերյան գրաֆների վրա rotor-router մոդելի երկու հիմնական հատկությունները կարելի է ձևակերպել ունիցիկլների լեզվով:

Թեորեմ 1 [125]. Դիցուք G -ն խիստ կապակցված դիգրաֆ է: Այդ դեպքում G -ի վրա մեկ մասնիկով ռոտորային վիճակը (ρ, v) ռեկուրենտ է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն ունիցիկլ է:

Այն ռոտորային վիճակները, որոնք ունիցիկլ չեն, անցողիկ են: Ի տարբերություն ռեկուրենտ վիճակների՝ դրանք առաջանում են էվոլյուցիայի սկզբնական փուլում՝ մինչև այն պահը, երբ համակարգը մտնում է էյլերյան շրջանցման մեջ:

Թեորեմ 2 [125]. Դիցուք $G = (V, E)$ -ն $m = |E(G)|$ կող ունեցող էյլերյան դիգրաֆ է, իսկ (ρ, v) -ն՝ G -ի ունիցիկլ: Եթե (ρ, v) վիճակից սկսած rotor-router գործողությունը կիրառենք m անգամ, ապա մասնիկը կանցնի G գրաֆի էյլերյան շրջանցումով, յուրաքանչյուր ռոտոր կկատարի մեկ լրիվ պտույտ, իսկ համակարգի վիճակը կվերադառնա սկզբնական (ρ, v) վիճակին:

Ռեկուրենտ վիճակում կոնտուրների դարձելիության թեորեմը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 3 [125], [281]. Դիցուք G -ն երկուղղորդված հարթ գրաֆ է, և $\rho \subset G$ -ի յուրաքանչյուր գագաթից դուրս եկող կողերը դասավորված են ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ: Թող (ρ, v) -ն G -ի ունիցիկլ է, որի C կոնտուրն ունի ժամացույցի սլաքի ուղղությամբ կողմնորոշում: Rotor-router դեգերման որոշ վերջավոր թվով քայլերից հետո C -ի ներսում գտնվող յուրաքանչյուր ռոտոր կատարում է լրիվ պտույտ, C -ից դուրս գտնվող ոչ մի ռոտոր չի շարժվում, իսկ C -ի վրա գտնվող յուրաքանչյուր ռոտոր կատարում է մասնակի պտույտ այնպես, որ C կոնտուրը կողմնորոշվում է ժամացույցի սլաքին հակառակ ուղղությամբ:

Դիտարկենք $G = (V, E)$ դիգրաֆում երկուղղորդված կոնտուր

$$C = (v_1, v_2, \dots, v_n),$$

այսինքն՝ այնպիսի կոնտուր, որում v_i և v_{i+1} գագաթները միացված են երկու հակադիր ուղղություններով կողերով, $1 \leq i \leq n$: Այստեղ ենթադրվում է n -պարբերականություն՝

$$v_{i \pm n} \equiv v_i:$$

Թող e_i^+ և e_{i+1}^- համապատասխանաբար նշանակեն v_i -ից դեպի v_{i+1} և v_{i+1} -ից դեպի v_i տանող ուղղորդված կողերը: Կողերի համար նույնպես ենթադրվում է n -պարբերականություն. այսինքն՝ $e_{i+n}^+ \equiv e_i^+$, $e_{i-n}^+ \equiv e_i^+$, $e_{i+n}^- \equiv e_i^-$ և $e_{i-n}^- \equiv e_i^-$:

e_i^- և e_i^+ նշումներում վերին ցուցիչները համապատասխանաբար ցույց են տալիս v_i գագաթում C կոնտուրի նկատմամբ բացասական և դրական ուղղությունները:

Ենթադրենք, որ G -ի վրա սահմանված է rotor-router մոդել: Ասում ենք, որ երկուղղորդված C կոնտուրը բավարարում է *դոմինոյի կարգավորմանը*, եթե յուրաքանչյուր v_i , $1 \leq i \leq n$, գագաթի ռոտորի համար գոյություն ունի այնպիսի $\alpha_{v_i}^*$ ուղղությամբ ռոտորը ցույց է տալիս v_i -ից դեպի v_{i-1} , իսկ $\alpha_{v_i}^* + 1$ ուղղությամբ՝ v_i -ից դեպի v_{i+1} : Ներմուծված

$$\alpha_{v_1}^*, \dots, \alpha_{v_n}^*$$

ուղղությունները կոչվում են C կոնտուրի նկատմամբ բացասական, իսկ

$$\alpha_{v_1}^* + 1, \dots, \alpha_{v_n}^* + 1$$

ուղղությունները՝ համապատասխանաբար կոչվում են դրական:

Մեր աշխատանքներում այն rotor-router դեգերումների համար, որոնք սկսվում են անցողիկ վիճակից, սահմանվում է թույլ դարձելիության գաղափարը: Ի տարբերություն ռեկուրենտ սկզբնական վիճակի դեպքի՝ այստեղ սկզբնական կոնտուրի շրջվելուց հետո կոնտուրի ներսում գտնվող որոշ ռոտորներ կարող են լրիվ պտույտ չկատարել:

Թեորեմ 4 [281] Տրված կամայական վերջավոր էյլերյան G դիգրաֆի համար, դիտարկենք $C = (v_1, \dots, v_n)$ դոմինոյի կարգավորմանը բավարարող երկուղղորդված կոնտուր: Թող rotor-router դեգերումը սկսվի v_n գագաթից այնպիսի սկզբնական ռոտորային կոնֆիգուրացիայով, որ v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, գագաթների բոլոր ռոտորներն ունենան դրական ուղղություններ: Այդ դեպքում քայլերի որոշ վերջավոր թվից հետո դեգերումը բերում է այնպիսի կոնֆիգուրացիայի, որում սկզբնական կոնտուրի ռոտորները ստանում են բացասական ուղղություններ

$$\alpha_{v_1}^*, \dots, \alpha_{v_n}^*:$$

Այն պահերը t_i , $i = 1, 2, \dots, n$, երբ հասանելի են դառնում $\alpha_{v_i}^*$ ուղղությունները, դասավորված են հետևյալ կարգով՝

$$0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_2 < t_1 \leq |E|:$$

Չնայած այն բանի, որ այստեղ դեգերումը էյլերյան շրջանցում չէ, այնուամենայնիվ, դարձելիության երկու հատկություններ պահպանվում են. դեգերումը կոնտուր է մտնում և կոնտուրից դուրս է գալիս նույն գագաթով, և կոնտուրի ռոտորների կողմնորոշումը

շրջվում է: Օգտագործելով Պրիեզդևի կողմից ապացուցված rotor-router դեգերման արեյան հատկությունը [122] - [123]՝ թույլ և ուժեղ դարձելիության հատկությունները կարելի է ընդհանրացնել բազմամասնիկ դեգերման համար:

Թեորեմ 5 [302] Տրված է կամայական վերջավոր էյլեյան դիգրաֆ G , և թող $C = (v_1, \dots, v_n)$ դոմինոյի կարգավորմանը բավարարող երկուղղորդված կոնտուր է: Թող $k < n$ rotor-router մասնիկներ սկսեն իրենց շարժումը C կոնտուրի գագաթներից այնպես, որ սկզբնական պահին որևէ գագաթում մեկից ավելի մասնիկ չլինի: Այդ սկզբնական գագաթները նշանակենք

$$v_{S_1}, \dots, v_{S_k}:$$

Ենթադրենք, որ C կոնտուրի բոլոր v_i , $i = 1, 2, \dots, n$, գագաթների ռոտորները սկզբնական պահին ունեն դրական ուղղություններ: Բազմամասնիկ rotor-router դեգերման ընթացքում, եթե մասնիկը հասնում է v_{S_j} , $j = 1, 2, \dots, k$, գագաթներից մեկին, և այդ գագաթի ռոտորն արդեն ունի բացասական ուղղություն, ապա տվյալ մասնիկը դադարեցնում է իր շարժումը: Այդ դեպքում քայլերի որոշ վերջավոր թվից հետո, անկախ այն հերթականությունից, որով մասնիկները շարժվում են, դեգերմումը ձևավորում է այնպիսի կոնֆիգուրացիա, որում կոնտուրի բոլոր ռոտորներն ունեն բացասական ուղղություններ

$$\alpha_{v_1}^*, \dots, \alpha_{v_n}^*:$$

Ավելին, բոլոր $v_{S_1}, \dots, v_{S_k}$ գագաթները զբաղեցված կլինեն՝ յուրաքանչյուրում մեկական մասնիկով: Եթե սկզբնական ռոտորային կոնֆիգուրացիան ռեկուրենտ է, այսինքն՝ համապատասխան ռոտորային ենթագրաֆում C -ից բացի այլ ցիկլեր չկան, ապա դեգերման ավարտին C -ի ներսում գտնվող յուրաքանչյուր ռոտոր կկատարի լրիվ պտույտ:

Ըստ այդ թեորեմի մասնավոր ձևակերպման՝ հարթ երկուղղորդված գրաֆում, երբ ռոտորների ուղղությունները կազմում են կոնտուր, իսկ մասնիկները իրենց շարժումը սկսում են այդ կոնտուրից, ապա rotor-router դեգերմումը շրջում է կոնտուրի ուղղությունը՝ պահպանելով գրաֆի ներսի ռոտորների կառուցվածքը: Ընդ որում, եթե սկզբում այլ ցիկլեր չկան, ապա կոնտուրի ներսում գտնվող ռոտորները կատարում են ամբողջական պտույտ: Անցողիկ սկզբնական վիճակների համար (երբ գրաֆը պարունակում է նաև այլ ցիկլեր) գործում է թույլ դարձելիության տարբերակը, որի դեպքում կոնտուրի կողմնորոշումը նույնպես շրջվում է, թեև ներսում գտնվող բոլոր ռոտորները պարտադիր չէ, որ կատարեն ամբողջական պտույտ:

Այս արդյունքը կարևոր կիրառական նշանակություն ունի ԱԹՍ-ների երամների միջոցով տարածքի ծածկման խնդիրների համար: Եթե հետազոտվող տարածքը ներկայացվում է որպես վերջավոր հարթ երկուղղորդված գրաֆ կամ ուղղակի քառակուսային ցանց, ապա rotor-router դինամիկան հնարավորություն է տալիս կառուցել այնպիսի շարժման սխեմա, որի արդյունքում ԱԹՍ-ը կամ ԱԹՍ-ների երամը համակարգված կերպով անցնում է բոլոր անհրաժեշտ կողերով և գագաթներով: Այս մոտեցման առավելությունն այն է, որ ծածկման գործընթացը ստացվում է

դետերմինիստական, վերարտադրելի և կախված չէ պատահական ընտրություններից: Դրանով ապահովվում է արդեն այցելված ուղղորդված կողերի կրկնակի մշակման բացառում և տարածքի կանոնավոր ծածկում:

Արելյան հատկության դերը այստեղ չափազանց կարևոր է, քանի որ տարբեր ԱԹՍ-ներ կարող են շարժվել տարբեր արագություններով, որոշները կարող են ուշանալ, իսկ մյուսները՝ առաջ ընկնել, սակայն ընդհանուր ծածկման արդյունքը պահպանվում է: Արդյունքում յուրաքանչյուր ԱԹՍ անցնում է էլեկտրոնային շրջագայության իր մասը, իսկ ամբողջ երամի համատեղ հետագիծը կազմում է ամբողջական էլեկտրոնային շրջագայություն:

Այս մոտեցումը հնարավորություն է տալիս մեկ ԱԹՍ-ի համար կառուցված ծածկման սխեման ընդհանրացնել մի քանի ԱԹՍ-ների համար: Սկզբում գրաֆի ռոտորային կոնֆիգուրացիան բերվում է ունիցիկլային վիճակի, որից հետո սահմանային կոնտուրի գազաթններում տեղադրվում են մի քանի ԱԹՍ-ներ՝ յուրաքանչյուր գազաթնում առավելագույնը մեկ ԱԹՍ պայմանով: Շարժման ընթացքում ԱԹՍ-ները կատարում են նույն ընդհանուր աշխատանքը, որը կկատարեր մեկ ԱԹՍ-ը, սակայն բաշխված ձևով: Արելյան հատկության շնորհիվ նրանց շարժման հերթականությունը և արագությունները չեն խախտում ընդհանուր ծածկման կառուցվածքը: Սա թույլ է տալիս իրականացնել տարածքի մոլտիէլեկտրոնային ծածկում՝ առանց յուրաքանչյուր ցիկլի ավարտին ԱԹՍ-ների միջև գլորբալ համաժամեցման անհրաժեշտության:

Առաջարկված ալգորիթմների կիրառական պատկերը հետևյալն է: Օգտատիրոջ էկրանին ցուցադրվող տարածքի պատկերի վրա տեղադրվում է վերջավոր քառակուսային ցանց կամ կամայական կապակցված հարթ երկուուղղորդված գրաֆ: Խոչընդոտներին համապատասխանող գազաթնները կարող են հեռացվել իրենց կից կողերի հետ միասին՝ պահպանելով գրաֆի կապակցվածությունը, իսկ անհրաժեշտության դեպքում կարող են ավելացվել նոր գազաթններ և կողեր՝ պահպանելով հարթ լինելը: Այս ձևափոխություններից հետո rotor-router մոդելի դարձելիության և էլեկտրոնային շրջագայության հիմնական հատկությունները շարունակում են գործել, ինչի շնորհիվ նույն ալգորիթմական մոտեցումը կիրառելի է ոչ միայն կանոնավոր քառակուսային ցանցերի, այլև իրական տարածքներին համապատասխանող ավելի բարդ գրաֆային ներկայացումների համար:

ԱԹՍ-ների աշխատանքի ընթացքում հնարավոր են տարբեր գործնական խնդիրներ՝ կապի խափանում, ԱԹՍ-ի վթար, որոշ գազաթների ժամանակավոր անհասանելիություն կամ նոր ԱԹՍ-ների ավելացում: Rotor-router մոդելի արելյան հատկությունը և բազմամասնիկային դարձելիության մեխանիզմը թույլ են տալիս այդ իրավիճակներում պահպանել առաքելության ընդհանուր կատարելիությունը: Եթե որևէ ԱԹՍ խափանվում է, նրա առաջադրանքը կարող է փոխանցվել այն ԱԹՍ-ին, որն առաջինն է ավարտել իր բաժինը: Եթե անհրաժեշտ է հավասարակշռել բեռը, ազատված ԱԹՍ-ն կարող է շարունակել շարժումը դեռևս չայցելված սահմանային գազաթնից: Նույն սկզբունքով երամին կարող են միացվել նոր ԱԹՍ-ներ, որոնք մեկնարկում են չայցելված սահմանային գազաթներից: Այսպիսով, մոդելը ապահովում է ոչ միայն դետերմինիստական ծածկում, այլև առաջադրանքների դինամիկ վերաբաշխման հնարավորություն:

Տեսական արդյունքների կիրառման երկրորդ կարևոր ուղղությունը լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման օպտիմալ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն սխեմաների կառուցումն է: Դասական gossip խնդրում n մասնակիցներից յուրաքանչյուրն ունի իր սկզբնական ինֆորմացիան, և նպատակն է հեռախոսային կանչերի հաջորդականության միջոցով ապահովել, որ վերջում բոլոր մասնակիցները տիրապետեն ամբողջ ինֆորմացիային: Յուրաքանչյուր կանչի ժամանակ երկու մասնակից փոխանակում են իրենց մոտ տվյալ պահին առկա ամբողջ ինֆորմացիան:

Գրաֆային լեզվով gossip սխեման ներկայացվում է կողապիտակավորված գրաֆով, որի գագաթները համապատասխանում են մասնակիցներին, իսկ կողերը՝ կանչերին: Կողերի պիտակները ցույց են տալիս կանչերի ժամանակային հերթականությունը: Մի գագաթից մյուսին ինֆորմացիայի փոխանցումը հնարավոր է, եթե այդ գագաթների միջև գոյություն ունի աճող ճանապարհ, այսինքն՝ այնպիսի ճանապարհ, որի երկայնքով կողերի պիտակները հաջորդաբար աճում են:

Խափանումների նկատմամբ դիմակայուն տարբերակում խնդիրը ավելի բարդ է: k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն gossip սխեմայում պահանջվում է, որ լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակումը պահպանվի կամայական մինչև k կանչերի կամ կապերի խափանման դեպքում: Այս խնդիրը հատկապես կարևոր է ԱԹՍ-ների երամների համար, որտեղ հաղորդակցական կապերը կարող են խաթարվել խոչընդոտների, հեռավորության մեծացման, ռադիոալիքների սահմանափակության կամ առանձին հանգույցների խափանման պատճառով:

Ինֆորմացիայի տարածման/փոխանակման մոդելների ֆորմալ նկարագիրը և մեր կողմից ապացուցված թեորեմներն ու կառուցողական ալգորիթմները տրված են [285] - [292] աշխատանքներում:

Այս ուղղությամբ կարևոր դեր ունի մեր կողմից ներմուծված լոկալ փոխատեղման մեթոդը: Կողապիտակավորված gossip գրաֆում ընտրված կողի նկատմամբ դիտարկվում են այդ կողին կից այն կողերը, որոնց պիտակները ավելի փոքր կամ ավելի մեծ են տվյալ կողի պիտակից: Լոկալ փոխատեղման օպերատորները P^+ և P^- վերադասավորում են տվյալ կողի շուրջ գտնվող կապերը՝ փոխելով գրաֆի լոկալ կառուցվածքը, բայց պահպանելով լրիվ gossip հատկությունը: Հայտնի է, որ լրիվ gossip գրաֆի վրա լոկալ փոխատեղման օպերատորների կիրառման արդյունքը կրկին լրիվ gossip գրաֆ է: Այս արդյունքը կարևոր է, քանի որ թույլ է տալիս արդեն հայտնի սխեմաներից ստանալ նոր սխեմաներ՝ առանց լրիվ ինֆորմացիայի տարածման հատկությունը կորցնելու:

Լոկալ փոխատեղման մեթոդը կիրառվել է նաև Քնյոդելի գրաֆների և դրանց ձևափոխությունների վրա հիմնված gossip սխեմաների կառուցման համար: Քնյոդելի գրաֆները կանոնավոր երկբաժան գրաֆներ են, որոնք ունեն հարմար կառուցվածք լրիվ ինֆորմացիայի տարածման, աճող ճանապարհների որոնման և օպտիմալ ժամանակային սխեմաների կառուցման համար: Քնյոդելի գրաֆների համաչափությունը թույլ է տալիս արդյունավետորեն ստուգել առաջադրված հիպոթեզները գագաթների մեծ թվերի դեպքում: Այդ նպատակով մշակվել է Graph Plotter ծրագրային գործիքը, որը նախատեսված է gossip գրաֆների կառուցման, վիզուալացման, տարբեր պարամետրերի արժեքների համար գրաֆների ընտանիքների

գեներացման, լոկալ փոխատեղման գործողությունների կատարման և լրիվ gossip կամ խափանումների նկատմամբ դիմակայունության հատկությունների փորձարարական ստուգման համար:

Քնյոդելի գրաֆների հիման վրա կառուցված սխեմաների համար առաջադրվել են հիպոթեզներ k խափանումների նկատմամբ դիմակայունության, կանչերի քանակի և լրիվ ինֆորմացիայի տարածման նվազագույն ժամանակի վերաբերյալ: Մասնավորապես, դիտարկվել է այն մոտեցումը, երբ k խափանումների նկատմամբ դիմակայուն սխեմա ստանալու համար օգտագործվում են լրացուցիչ k ժամանակային քայլերի ցիկլիկ կրկնություններ: Այս կառուցումների համար ստացվում է լրիվ խափանումակայուն gossiping-ի ժամանակի վերին գնահատական որը, հայտնի ստորին գնահատականների հետ համադրելով, հնարավորություն է տալիս համապատասխան պայմաններում դիտարկել որպես նվազագույն ժամանակի ճշգրիտ արժեք զույգ n -երի համար: Սա կարևոր արդյունք է ԱԹՍ-ների երամների հուսալի հաղորդակցության համար, քանի որ այն թույլ է տալիս նախապես գնահատել, թե որքան լրացուցիչ ժամանակային ռեսուրս է անհրաժեշտ k խափանումների պայմաններում լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակումը պահպանելու համար:

Այս մաթեմատիկական կառուցումները անմիջականորեն կիրառվում են ԱԹՍ-ների երամների հաղորդակցական ենթահամակարգում: Երամի տրամաբանորեն կապված հանգույցների միջև անհրաժեշտ է փոխանակել նույնականացման բանալիներ, գաղտնագրված պատկերներ, տեղաշարժերի հաջող կատարման մասին ծանուցումներ և առաքելության ընթացիկ վիճակի վերաբերյալ տվյալներ: Եթե կապը խզվում է և հաղորդագրությունը չի հասնում հասցեատիրոջը, ապա անհրաժեշտ է վերակառուցել հաղորդակցական սխեման կամ ավելացնել լրացուցիչ ժամանակային քայլեր: Քնյոդելի գրաֆների և լոկալ փոխատեղման մեթոդի կիրառումը հնարավորություն է տալիս ձևավորել նոր կապեր, բարձրացնել սխեմայի խափանումների նկատմամբ դիմակայունությունը և պահպանել լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման հնարավորությունը դինամիկ փոփոխվող միջավայրում:

Այսպիսով, rotor-router մոդելի և gossip/broadcast սխեմաների տեսական արդյունքները միասին ձևավորում են ինքնակազմակերպվող ԱԹՍ-ների երամների մաթեմատիկական և ալգորիթմական հիմքը: Rotor-router և մուլտիէլյերյան դեգերումները ապահովում են տարածքի դետերմինիստական ծածկման, առաջադրանքների բաշխման և գլոբալ համաժամեցումից անկախ համատեղ աշխատանքի մեխանիզմները: Gossip և broadcast սխեմաները, իրենց հերթին, ապահովում են երամի անդամների միջև լրիվ, օպտիմալ և խափանումների նկատմամբ դիմակայուն ինֆորմացիայի փոխանակումը: Այդ երկու ուղղությունների համադրումը հնարավորություն է տալիս կառուցել ինքնավար, ապակենտրոնացված և ինքնակազմակերպվող բազմաազենտային համակարգեր, որոնք կարող են կիրառվել ԱԹՍ-ների երամների հուսալի կառավարման, մեծ տարածքների մշտադիտարկման, պատկերային տվյալների հավաքման և առաքելությունների անվտանգ իրականացման համար:

3.3. ԱԹՍ-ների երամի համակարգման և առաջադրանքների կատարման հարթակ

Հետազոտությունների կիրառական ուղղությունը նվիրված է ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների համար մշակված ծրագրա-ապարատային համակարգին: Մշակված հարթակը հնարավորություն է տալիս ԱԹՍ-ների երամին իրականացնել տարածքի օպտիմալ մոլտիէլեկտրյան ծածկույթ ինչպես գլոբալ նավիգացիոն համակարգի առկայության, այնպես էլ դրա բացակայության պայմաններում՝ օգտագործելով լոկալ նավիգացիայի, լոկալ ցանցի և ամպային վերահսկման միջոցներ: Ինքնակազմակերպման ալգորիթմի աբեյլյան հատկությունը թույլ է տալիս որևէ ԱԹՍ-ի խափանման կամ արտաքին պատճառներով դանդաղ աշխատանքի դեպքում մյուս ԱԹՍ-ներին ստանձնել նրա գործողությունների մի մասը և ավարտին հասցնել առաջադրանքը:

Հարթակի հիմնական նպատակն է համադրել ԱԹՍ-ների լոկալ ինքնավարությունը և ամպային միջավայրի հաշվարկային ու կազմակերպչական հնարավորությունները: Այս մոտեցմամբ ամպը չի դառնում ԱԹՍ-ների անընդհատ կենտրոնացված թռիչքային կառավարիչ, այլ կատարում է առաքելության նախագծման, պլանների ստուգման, սիմուլյացիայի, telemetry տվյալների հավաքագրման, շեղումների հայտնաբերման, ուղղումների առաջարկման և հետաառաքելական վերլուծության օժանդակ շերտի դեր:

3.3.1. Հարթակի ընդհանուր ճարտարապետությունը

Մշակված համակարգը ունի մոդուլային կառուցվածք և ներառում է մի քանի փոխկապակցված շերտեր՝ բազմօգտատեր հաճախորդային միջավայր, ամպային միկրոծառայությունների շերտ, հաղորդակցական ենթահամակարգ և ԱԹՍ-ների կողմում գործող լոկալ գործակալներ: Հաճախորդային միջավայրը ապահովում է օպերատորների համատեղ աշխատանքը, տարածքի ընտրությունը, առաքելության գրաֆային ներկայացման կառուցումը և սիմուլյացիոն արդյունքների դիտարկումը:

Ամպային շերտը կառուցված է Kubernetes-ի վրա հիմնված cloud-native միկրոծառայությունների ճարտարապետությամբ: Նախորդ մոնոլիթային տարբերակի համեմատ այս մոտեցումը թույլ է տալիս համակարգի հիմնական գործառնությունները բաժանել անկախ ծառայությունների՝ առաքելության համատեղ խմբագրում, պլանավորում, սիմուլյացիա, հեռաշահության ընդունում, շեղումների հայտնաբերում, հրահանգների առաքում և տվյալների պահպանում: Յուրաքանչյուր ծառայություն ունի հստակ սահմանված պարտականություն և կարող է զարգացվել, թեստավորվել, մասշտաբացվել կամ վերագործարկվել անկախ մյուսներից՝ առանց ամբողջ համակարգի աշխատանքի դադարեցման:

Հարթակում առանձնացվում են երկու հիմնական տրամաբանական հոսքեր: Առաջինը կառավարման հարթությունն է, որը ներառում է օգտատերերի գործողությունները, աշխատանքային տարածքների պահպանումը, առաքելության գրաֆի փոփոխությունները, պլանների կոմպիլյացիան, սիմուլյացիոն արդյունքները և

առաքելության վիճակը: Երկրորդը տվյալների հարթությունն է, որը ներառում է ԱԹՍ-ներից ստացվող բարձր հաճախականությամբ հեռաչափությունը, կենդանի դիրքային տվյալները, առողջական վիճակը, մարտկոցի մակարդակը և կատարման ընթացքը: Այս բաժանումը կարևոր է, քանի որ առաքելության գրաֆը, թույլտվությունները և կոմպիլացված պլանները պահանջում են խիստ հետևողականություն և տարբերակավորում, իսկ telemetry հոսքերը պահանջում են ցածր ուշացում, արագ տարածում և որոշ չափով կարող են հանդուրժել կարճաժամկետ կորուստներ կամ ուշացումներ:

ԱԹՍ-ների կողմում գործող UAV Agent-ները աշխատում են յուրաքանչյուր թռչող սարքի companion computer-ի վրա, օրինակ՝ Raspberry Pi-ի վրա, և կապ են ապահովում թռիչքային վերահսկիչի, autopilot-ի և սենսորների հետ: Գործակալը պահպանում է առաքելության լոկալ վիճակը, իրականացնում է rotor-router կանոններով անցումները, փոխանցում է telemetry տվյալներ և ստանում է ամպային շերտից supervisory կամ corrective հրահանգներ: Այսպիսով ամպը չի կատարում ԱԹՍ-ների անընդհատ ցածր մակարդակի թռիչքային կառավարում, այլ հանդես է գալիս որպես պլանավորման, վերահսկման, համեմատման և ուղղիչ աջակցության շերտ: Կապի ժամանակավոր խափանման դեպքում ԱԹՍ-ն կարող է շարունակել լոկալ ինքնավար աշխատանքը և կապի վերականգնումից հետո վերասինխրոնացնել իր ընթացիկ վիճակը ամպային միջավայրի հետ:

3.3.2. Միկրոճառայությունների բաժանումը և պարտականությունները

Հարթակի ամպային շերտը բաժանված է մի շարք փոխկապակցված միկրոճառայությունների, որոնցից յուրաքանչյուրը պատասխանատու է առաքելության կյանքի ցիկլի առանձին փուլի կամ տվյալների առանձին հոսքի համար: Այս մոտեցումը փոխարինում է նախորդ մոնոլիթային կառուցվածքը ավելի ճկուն ճարտարապետությամբ, որտեղ առաքելության խմբագրումը, պլանավորումը, սինույացիան, telemetry-ի մշակումը, շեղումների հայտնաբերումը, ԱԹՍ-ների հետ կապը և տվյալների պահպանումը առանձնացված են որպես անկախ ծառայություններ:

Ծառայությունների միջև փոխազդեցությունը իրականացվում է հստակ սահմանված gRPC/Protocol Buffers ինտերֆեյսներով: Սա ապահովում է հաղորդագրությունների տիպային նկարագրություն, backward-compatible ընդլայնման հնարավորություն և client/server բաղադրիչների անկախ զարգացում: Արդյունքում հարթակը դառնում է ավելի հեշտ պահպանվող, թեստավորվող և ընդլայնվող՝ պահպանելով ապակենտրոնացված ԱԹՍ-ների լոկալ ինքնավարության սկզբունքը:

API Gateway Service-ը հանդիսանում է արտաքին մուտքի միասնական կետը Qt/C++ հաճախորդային հավելվածի, օպերատորների և վերլուծաբանների համար: Այն առանձնացնում է ներքին միկրոճառայությունները արտաքին հաճախորդներից, ապահովում է հարցումների երթուղավորում, մուտքի վերահսկում, TLS կապ և client-facing gRPC ինտերֆեյսների կայուն շերտ: Հաճախորդային հավելվածը API Gateway-

ի միջոցով կատարում է տարածքի ընտրության, workspace-ի ստեղծման, գրաֆի խմբագրման, սիմուլյացիայի մեկնարկի, առաքելության մեկնարկի և live monitoring-ի գործողությունները: Այս ծառայությունը թույլ է տալիս, որ ներքին ծառայությունների կառուցվածքը փոխվի կամ ընդլայնվի՝ առանց հաճախորդային հավելվածի հետ անմիջական կապը խախտելու:

Mission/Collaboration Service-ը պատասխանատու է աշխատանքային տարածքների, առաքելության գրաֆային մոդելի, օգտատերերի համատեղ խմբագրումների, առաքելության վիճակի և թույլտվությունների կառավարման համար: Օգտատերը կարող է ստեղծել առանձին workspace, ընտրել գործողության տարածքը, սահմանել ֆոնային քարտեզային պատկեր, կառուցել զագաթներ և կողեր, նշել խոչընդոտներ, սահմանափակումներ, ԱԹՍ-ների դերեր և խմբագրել առաքելության պարամետրերը: Համատեղ աշխատանքի դեպքում մի քանի օգտատեր կարող են միաժամանակ դիտել կամ փոփոխել նույն առաքելությունը՝ ըստ իրենց դերերի և թույլտվությունների: Այս ծառայությունը պահպանում է առաքելության authoritative վիճակը և ապահովում է, որ բոլոր հաճախորդային հավելվածները տեսնեն նույն հաստատված փոփոխությունները:

Planning Service-ը պատասխանատու է առաքելության գրաֆի ստուգման և rotor-router հիմքով պլանի գեներացման համար: Այն ստուգում է գրաֆի կապակցվածությունը, թույլատրելի անցումները, խոչընդոտների և արգելված գոտիների ազդեցությունը, ինչպես նաև առաքելության սահմանափակումների բավարարումը: Դրանից հետո ծառայությունը գրաֆը կոմպիլացնում է կատարելի mission package-ի, որը կարող է ներառել վավերացված waypoint graph, rotor state-ներ, cyclic edge order-ներ, ԱԹՍ-ների սկզբնական բաշխումներ և կատարման համար անհրաժեշտ մետատվյալներ: Planning Service-ի արդյունքը օգտագործվում է ինչպես offline սիմուլյացիայի, այնպես էլ իրական ԱԹՍ-ների վրա առաքելության մեկնարկի ժամանակ:

Simulation Service-ը իրականացնում է առաքելության offline ստուգում և reference trace-ների գեներացում: Այն օգտագործում է Planning Service-ի կողմից պատրաստված deterministic mission package-ը և նախապես մոդելավորում է ԱԹՍ-ների սպասվող տեղաշարժը, գրաֆի ծածկույթը, հնարավոր հերթականությունները և առաքելության կատարման ընթացքը: Սիմուլյացիայի արդյունքները վերադարձվում են հաճախորդային հավելվածին, որտեղ օպերատորը կարող է դրանք դիտել նույն mission editor միջավայրում: Այս ծառայության կարևոր նպատակն է մինչև իրական թռիչքը հայտնաբերել սխալ գրաֆային կառուցվածք, անջատված հատվածներ, սխալ նշված խոչընդոտներ, ոչ իրատեսական սահմանափակումներ կամ ԱԹՍ-ների անհամապատասխան դերաբաշխում:

Deviation-Correction Service-ը հանդիսանում է ամպային supervisory շերտի հիմնական բաղադրիչը: Այն իրական կատարման փուլում համեմատում է ԱԹՍ-

ներից ստացվող կենդանի telemetry տվյալները Simulation Service-ի կողմից նախապես գեներացված reference trace-ների հետ: Համեմատությունը կատարվում է ոչ թե յուրաքանչյուր փոքր շեղման համար, այլ տարածական, ժամանակային և առաքելության առաջընթացի թույլատրելի սահմանների հիման վրա: Եթե ԱԹՍ-ն դուրս է գալիս նախատեսված corridor-ից, չի հասնում սպասվող waypoint-ին թույլատրելի ժամանակում, կորցնում է կապը կամ չի կատարում իրեն վերագրված graph obligation-ը, ծառայությունը կարող է առաջարկել կամ ուղարկել ուղղիչ գործողություն: Այդ գործողությունը կարող է լինել վերադարձ դեպի նախատեսված ուղի, անցում դեպի recovery waypoint, հաջորդ վավեր graph state-ի հետ սինխրոնացում կամ չկատարված պարտականությունների վերաբաշխում այլ ԱԹՍ-ների միջև: Այս ծառայությունը չի փոխարինում ԱԹՍ-ի autopilot-ին և չի կատարում անընդհատ կենտրոնացված flight control, այլ ապահովում է առաքելության մակարդակի վերահսկում և ուղղիչ աջակցություն:

Telemetry Service-ը ընդունում, մշակում և տարածում է ԱԹՍ-ներից ստացվող կենդանի telemetry տվյալները: Այդ տվյալները կարող են ներառել դիրք, արագություն, բարձրություն, մարտկոցի մակարդակ, կապի վիճակ, առողջական վիճակ, ընթացիկ waypoint, mission progress և այլ պարամետրեր: Telemetry Service-ը ծառայում է որպես իրական ժամանակի տեղեկատվական հիմք՝ ապահովելով տվյալների փոխանցում Qt/C++ հաճախորդային հավելվածին live visualization-ի համար և Deviation-Correction Service-ին՝ շեղումների հայտնաբերման համար: Քանի որ telemetry-ը բարձր հաճախականությամբ տվյալների հոսք է, այն առանձնացվում է առաքելության գրաֆի և պլանների նման մշտական կառավարման օբյեկտներից: Այս բաժանումը թույլ է տալիս միաժամանակ ապահովել ցածր ուշացումով դիտարկում և պահպանել առաքելության հիմնական վիճակի հետևողականությունը:

Drone Gateway-ը հանդիսանում է ԱԹՍ-ների և ամպային ենթակառուցվածքի միջև կապի հիմնական կետը: Այն պահպանում է կապի session-ներ յուրաքանչյուր UAV Agent-ի հետ, ընդունում է telemetry հոսքերը, փոխանցում է դրանք Telemetry Service-ին և անհրաժեշտության դեպքում առաքում է supervisory կամ corrective հրահանգներ դեպի համապատասխան ԱԹՍ: Drone Gateway-ը նաև մեկուսացնում է drone-facing communication logic-ը մնացած ծառայություններից, ինչը պարզեցնում է կապի վերականգնումը, session-ների կառավարումը, authentication-ը և message ordering-ը: Ընդհատվող կամ անկայուն կապի պայմաններում այս ծառայությունը կարևոր դեր ունի reconnect և resynchronization մեխանիզմների իրականացման համար:

Data Service-ը պատասխանատու է առաքելության ընթացքում և դրանից հետո առաջացած տվյալների պահպանման, մշակման և հասանելիության համար: Այն պահպանում է mission artifact-ներ, logs, քարտեզներ, պատկերներ, սիմուլյացիոն արդյունքներ, telemetry-ի տվյալներ և հետառաքելական վերլուծության նյութեր: Եթե

ԱԹՍ-ները հավաքում են պատկերներ կամ այլ sensor տվյալներ, Data Service-ը կարող է կազմակերպել դրանց ներբեռնումը, մետատվյալների ստուգումը, մշակման առաջադրանքների հերթագրումը և արդյունքների տրամադրումը վերլուծաբաններին: Այս ծառայությունը առանձնացված է telemetry և control ծառայություններից, քանի որ տվյալների երկարաժամկետ պահպանումը և պատկերների մշակումը ունեն այլ մասշտաբայնության ու հաշվարկային պահանջներ:

UAV-Side Agent-ը լոկալ գործակալ է, որը աշխատում է յուրաքանչյուր ԱԹՍ-ի վրա՝ սովորաբար companion computer-ի, օրինակ՝ Raspberry Pi-ի վրա: Այն կապվում է Flight Controller-ի, autopilot-ի և սենսորների հետ, պահպանում է առաքելության լոկալ վիճակը, կատարում է rotor-router լոկալ անցումները, հավաքում է telemetry և կատարում է ամպից ստացված mission-level հրահանգները: UAV Agent-ը կարևոր է, քանի որ իրական կատարումը մնում է ապակենտրոնացված: ԱԹՍ-ն չի սպասում ամպից յուրաքանչյուր փոքր քայլի հրահանգի, այլ գործում է նախապես ստացված deterministic mission package-ի հիման վրա: Կապի վատացման դեպքում գործակալը կարող է շարունակել լոկալ կատարման տրամաբանությունը, իսկ կապի վերականգնումից հետո փոխանցել կուտակված առաջընթացը և վերասինխրոնացվել ամպային ծառայությունների հետ:

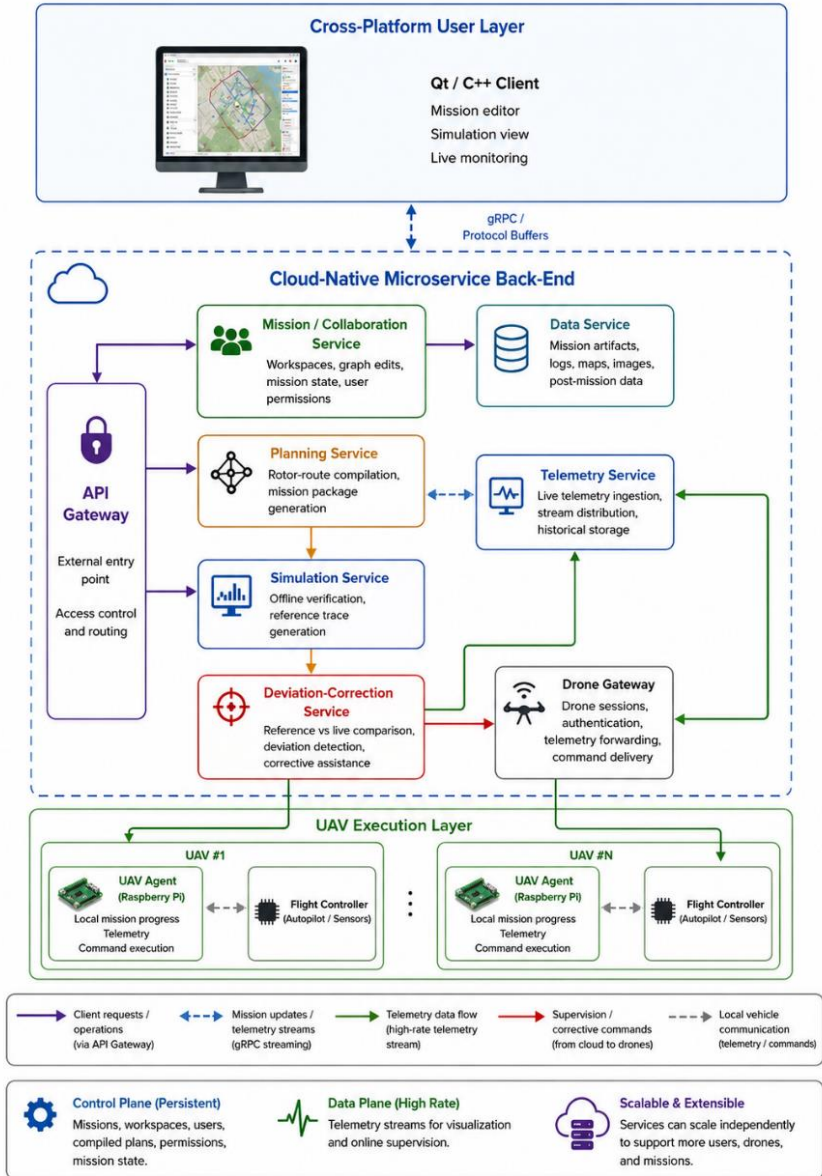
Թվարկված միկրոծառայությունների համակցությունը ձևավորում է ամբողջական միջավայր, որտեղ նույն առաքելության մոդելը օգտագործվում է նախագծման, պլանավորման, սիմուլյացիայի, իրական կատարման, live monitoring-ի և հետառաքելական վերլուծության փուլերում: Դրա շնորհիվ նվազում է այն վտանգը, որ առաքելությունը մեկ գործիքով նախագծվի, այլ գործիքով սիմուլյացվի և իրական կատարման ժամանակ ներկայացվի լրիվ այլ ձևով: Հարթակի հիմնական առավելությունն այն է, որ deterministic swarm logic-ը պահպանվում է ԱԹՍ-ների կողմում, իսկ ամպային շերտը ապահովում է collaboration, verification, telemetry supervision, correction և analytics հնարավորությունները:

3.3.3. Հարթակի հիմնական ալգորիթմական մեխանիզմները

Հարթակի գործառույթներում ներառված են նախորդ գլուխներում ստացված տեսական և ալգորիթմական արդյունքների հիման վրա մշակված ու ծրագրավորված մեխանիզմներ: Rotor-router և մուլտիէլեյշյան ծածկույթի գաղափարները կիրառվում են առաքելության գրաֆի վրա դետերմինիստական անցումների, տարածքի ծածկման և առաջադրանքների բաշխման համար, իսկ տեղեկատվության լրիվ փոխանակման, gossip/broadcast տարածման և խափանումադիմացկուն հաղորդակցության սխեմաները՝ ԱԹՍ-ների միջև տվյալների, վիճակի և կառավարման տեղեկության հուսալի փոխանակման համար:

Առաքելության տարածքը ներկայացվում է ուղղորդված գրաֆի միջոցով, որի գագաթները համապատասխանում են թույլատրելի կետերին, իսկ կողերը՝ հնարավոր անցումներին: Rotor-router կանոնը ապահովում է կանխատեսելի և կրկնելի անցումներ՝ առանց գլոբալ կենտրոնացված կառավարման: Այս մեխանիզմը օգտագործվում է պլանի գեներացման, offline սիմուլյացիայի և ԱԹՍ-ների լոկալ կատարման համար:

Իրական կատարման փուլում դետերմինիստական պլանավորումը լրացվում է բախումների նվազեցման մեխանիզմներով: Այդ նպատակով կիրառվում են waypoint-ների լոկալ LIFO stack-եր, corridor lock-եր և aging priority կանոններ: Դրանք թույլ են տալիս մի քանի ԱԹՍ-ների անվտանգ աշխատել նույն գրաֆային միջավայրում՝ չխախտելով rotor-router դետերմինիստական տրամաբանությունը և պահպանելով առաքելության ընդհանուր ծածկման ամբողջականությունը:



Նկար 1. Cloud-native միկրոծառայությունների ճարտարապետությունը՝ ԱԹՍ-ների ապակենտրոնացված երաժի առաքելությունների նախագծման, սիմուլյացիայի, վերահսկման և կարարման համար:

Խափանումադիմացկուն gossip տարածման շերտը ապահովում է ԱԹՍ-ների միջև առաքելության վիճակի, առաջընթացի, սինխրոնացման կետերի, հեռաչափության և խափանումների մասին տեղեկությունների տարածումը: Gossip մեխանիզմը լրացնում է rotor-router կոորդինացումը՝ ապահովելով բաշխված իրազեկվածություն ընդհատվող կապի, packet loss-ի և մասնակի խափանումների պայմաններում: Համակարգում օգտագործվում են Knödel gossip graph-երի կառուցվածքներ և լոկալ փոխատեղման մեխանիզմներ, որոնք թույլ են տալիս տեղեկատվությունը տարածել այլընտրանքային ուղիներով, երբ որոշ կապեր ժամանակավորապես անհասանելի են:

3.3.4. Հաղորդակցության անվտանգություն

Անվտանգ հաղորդակցության համար հարթակում նախատեսված են օգտատերերի նույնականացման, դերերի վրա հիմնված հասանելիության վերահսկման, ԱԹՍ-ների և ամպային ծառայությունների միջև պաշտպանված կապի, ինչպես նաև բանալիների կառավարման մեխանիզմներ: Հում նյութերում նշված են ASCON և Blom-ի բանալիների նախաբաշխման սխեմայի կիրառման հնարավորությունները, ինչպես նաև confidential/anonymouse computation մոտեցումները, որոնք կարող են օգտագործվել ներբազմային հաղորդակցության և ԱԹՍ-ամպ կապի անվտանգության ապահովման համար:

3.3.5. Ինժեներական մոտիվացիա և կիրառություններ

Տեսական արդյունքները լրացվել են ինժեներական լուծումներով, որոնք ուղղված են ինքնակազմակերպվող բազմաազենտային համակարգերի նախագծմանը: Մշակվել են սիմուլյացիոն ալգորիթմներ և ստեղծվել են ծրագրային հարթակներ, որոնք ներդրվել են բազմաօգտատեր ամպային միջավայրերում: Փորձարարական մակարդակում մշակվել և փորձարկվել են ԱԹՍ-ների երամների երկու տիպի ծրագրաապարատային լուծումներ: Առաջին փուլում, առկա մաթեմատիկական մոդելների, ալգորիթմների և մշակված ծրագրաապարատային լուծումների նախնական ստուգման նպատակով, Holybro X500 հարթակի հիման վրա ձևավորվել է չորս ԱԹՍ-ներից կազմված փորձարարական երամ: Այս փուլը հնարավորություն է տվել գնահատել առաջարկված ինքնակազմակերպման, տեղաշարժի կառավարման և տեղեկատվության փոխանակման մոտեցումների կիրառելիությունը իրական սարքային միջավայրում: Հետագա փուլում նպատակ է դրվել ստացված լուծումները մոտեցնել իրական կիրառական պայմաններին և իրականացնել ավելի ամբողջական ծրագրաապարատային համակարգ՝ սկսած նախագծումից մինչև վերջնական իրականացում: Այդ նպատակով նախագծվել և հավաքվել է տասը քվադրոկոպտերից կազմված ԱԹՍ-ների երամ, որը նախատեսված է երկարաժամկետ և մեծածավալ աշխատանքների իրականացման համար: Մշակված ԱԹՍ-ները մեկ մարտկոցով կարող են թռչել մինչև 45 րոպե՝ առանց օգտակար բեռի, հետախուզական ռեժիմում, և

մինչև 30 րոպե՝ մինչև 1.5 կգ օգտակար բեռով: Երկու մարտկոցով շահագործման դեպքում թոփչքի ժամանակը առանց օգտակար բեռի կարող է հասնել մինչև 120 րոպեի, իսկ մոտ 1 կգ օգտակար բեռով՝ մինչև 50 րոպեի:

Նշված ԱԹՍ-ների երամը հնարավորություն է տալիս իրականացնել ինչպես տարածքի զննում և հետախուզական դիտարկում, այնպես էլ օգտակար բեռի տեղափոխում: Երամի ներսում տվյալների փոխանակումը կազմակերպվում է gossip/broadcast ալգորիթմների հիման վրա՝ օգտագործելով ԱԹՍ-ների վրա ավելացված ժամանակակից կապի հանգույցները: Տարածքի ինքնակազմակերպվող մոդելի աշխատանքի, ինչպես նաև մնացած ծառայողական և կառավարման տեղեկատվության փոխանակումն իրականացվում է GSM կապուղիների և հեռախոսային կապի համակարգի միջոցով:

Կատարված փորձարկումները ծառայել են մշակված մաթեմատիկական մոդելների, ալգորիթմների և ծրագրաապարատային լուծումների գործնական կիրառելիության ստուգմանը: Դրանք ցույց են տվել, որ առաջարկված մոտեցումները կարող են օգտագործվել իրական ԱԹՍ-ների երամների կառավարման, տեղեկատվության փոխանակման, տարածքի զննման և բեռի տեղափոխման սցենարներում: Փորձարկումների ընթացքը և առանձին արդյունքները փաստագրվել են նաև տեսանյութերի տեսքով:

3.4. Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում ստացված կիրառական արդյունքները

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում մշակված թվային մեթոդները, ծրագրային գործիքները և ԱԹՍ-ների երամային հարթակը ներկայացված են հեղինակի կողմից և համահեղինակությամբ հրատարակված մի շարք աշխատանքներում: Այս աշխատանքները կարելի է խմբավորել ըստ զարգացման հաջորդականության՝ թվային մոդելավորում և զուգահեռ հաշվարկներ, gossip սխեմաների ծրագրային ուսումնասիրություն, ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող հարթակների ստեղծում, առաքելությունների պլանավորում և անվտանգ հաղորդակցություն:

- [293] և [294] աշխատանքներում մշակվել է d -չափանի $N = n^d$ գագաթների թվով խորանարդային ցանցի վրա սահմանված բջջային ավտոմատների մոդելավորման զուգահեռացված ալգորիթմ: Օգտագործվել է այն փաստը, որ բջջային ավտոմատի տվյալ բջջի (գագաթի) վիճակը ժամանակի հաջորդ տակտում որոշվում է տվյալ պահին նրա և նրան կից բջիջների վիճակներով: Պրոցեսը զուգահեռացնելու նպատակով կառուցվել է ցանցի աստղային ծածկույթ, որի միջոցով առանձնացվել են միմյանցից անկախ գագաթների բազմություններ: Ցույց է տրվել, որ աստղային ծածկույթի գոյության համար բավարար է $n \bmod (2d + 1) = 0$ պայմանը, որտեղ n -ը ցիկլիկ եզրային պայմաններով d չափանի $\mathcal{L}$ հիպերխորանարդային ցանցի գծային

չափն է: Աստղային ծածկույթի կենտրոնական գագաթների բազմությունը տրվում է հետևյալ կերպ՝

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_d): x_1 + 2x_2 + \dots + dx_d \bmod (2d + 1) = 0, (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathcal{L}\}:$$

Յուրաքանչյուր աստղ բաղկացած է մեկ կենտրոնական գագաթից և նրան կից հարևան գագաթներից: Ըստ կառուցման՝ կամայական երկու տարբեր աստղեր միմյանց հետ չեն հատվում, այսինքն՝ չունեն ընդհանուր գագաթներ:

Հաշվարկների համար որպես օրինակ դիտարկվել են ավագահատիկների արելյան ավտոմատների մեծ չափայնությամբ ու մեծածավալ սիմուլյացիաների արդյունավետ իրականացման հարցերը: Այդ մոտեցումը հնարավորություն է տվել կազմակերպել ավագահատիկների փլուզումների զուգահեռ կատարումը և հիմք է հանդիսացել հետագա թվային մոդելավորման, զուգահեռ ալգորիթմների և բարձր արտադրողականությամբ հաշվարկների կիրառման համար:

- [295] աշխատանքում առաջարկվել է ֆրոնտալ բջջային ավտոմատների մոտեցումը արելյան հատկությամբ օժտված անհավասարակշիռ ցանցային մոդելների թվային հետազոտման համար: Ալգորիթմի հիմքում ընկած է փլուզման ենթակա գագաթների ցուցակի՝ ակտիվ գագաթներից կազմված ճակատի ձևավորումը, որից հետո այդ գագաթների փլուզումը կատարվում է ընտրված հերթականությամբ: Արելյան հատկության շնորհիվ վերջնական կայուն կոնֆիգուրացիան կախված չէ այն հաջորդականությունից, որով կատարվում են փլուզումները: Ընդ որում, յուրաքանչյուր գագաթի փլուզումների քանակը որոշվում է միայն սկզբնական կոնֆիգուրացիայով: Հետևաբար, ալգորիթմական արդյունավետության տեսանկյունից նպատակահարմար կարող է լինել, օրինակ, նախ փլուզել առավել մեծ բարձրություն ունեցող գագաթները: Փլուզման պրոցեսի ընթացքում արդեն մշակված գագաթները հեռացվում են ակտիվ գագաթների ցուցակից, իսկ նոր ակտիվացած գագաթներն ավելացվում են այդ ցուցակին: Ընդ որում, գագաթի ավելացման և հեռացման գործողություններից յուրաքանչյուրը իրականացվում է $O(1)$ ժամանակում:

- [296] աշխատանքում ուսումնասիրվել են լուրերի/ինֆորմացիայի տարածման (rumor spreading) մոդելի և ներթափանցող պերկուլյացիայի (invasion percolation) հնարավոր կապերը:

Լուրերի տարածման մոդելը նկարագրում է ինֆորմացիայի տարածումը հաջորդական հեռախոսազանգերի պարբերաբար կրկնվող գործընթացի միջոցով, մինչդեռ ներթափանցող պերկուլյացիան վերաբերում է ծակոտկեն միջավայրում հիդրավիկ պոմպի միջոցով ներարկվող հեղուկի տարածման մոդելավորմանը (սլանցային գազի արդյունահանման պրոցես, shale gas extraction process):

Արելյան ավագակույտի մոդելում գրաֆի գագաթներում հատիկների փլուզման գործընթացը մեկնաբանվել է որպես տվյալ պահին ակտիվացված գագաթում կուտակված ամբողջ ինֆորմացիայի փոխանցում նրա բոլոր հարևաններին, այսինքն՝ որպես k -broadcast գործընթաց: Քանի որ գագաթների ակտիվացումը

կատարվում է նախապես տրված պատահական կարգով, իսկ մեկ տակտը սահմանվում է որպես բոլոր գազաթների ակտիվացմանը համապատասխան դիսկրետ ժամանակային միջակայք, առաջանում է լրիվ ինֆորմացիայի փոխանակման կամ փոխանցման համար անհրաժեշտ տակտերի միջին քանակը գնահատելու խնդիր:

$n \times n$ չափի ցանցերի համար տակտերի միջին քանակի ճշգրիտ բանաձև դեռևս ստացված չէ: Այնուամենայնիվ, մեծածավալ փորձարարական տվյալների հիման վրա կառուցվել են հիմնական բնութագրիչների վիճակագրական կորեր, որոնց ուսումնասիրությունը հնարավորություն է տվել ձևակերպել հիպոթեզ, ըստ որի՝ լրիվ ինֆորմացիայի տարածման համար անհրաժեշտ տակտերի միջին քանակը մոտավորապես հավասար է $0.25n$:

Ուսումնասիրվել են նաև լուրերի տարածման և կապային ինվազիոն պերկոլյացիայի մոդելները՝ դրանց միջև հնարավոր կապերը բացահայտելու նպատակով: Յուրաքանչյուր մեկ տակտի ընթացքում լուրը հասնում է ընդունող հանգույցին այն դեպքում, երբ լուրի աղբյուրի և այդ հանգույցի միջև գոյություն ունի հաջորդական կանչերի շղթա: Քանի որ կանչերի հաջորդականությունը ընտրվում է հավասարաչափ պատահականորեն բոլոր հնարավոր հաջորդականությունների բազմությունից, ուսումնասիրվել են ինֆորմացիայի տարածման անալիտիկ հատկությունները:

- [297] աշխատանքում դիտարկվել են թշնամական միջավայրերում գործող ԱԹՍ-ների երամների համար tamper-proof hardware solution և համապատասխան ալգորիթմներ: Այս ուղղությունը ձևավորում է մշակված հարթակի անվտանգության և վստահելի կատարման բաղադրիչների նախնական հիմքը:
- [298], [299] և [324] աշխատանքներում ներկայացվել է ամպային հիմքով ինքնակազմակերպվող ԱԹՍ-ների երամի սիմուլյացիոն և բազմօգտատեր հարթակը: Հարթակի միջոցով ապահովվում են օգտատերերի համատեղ աշխատանքը, առաքելության գրաֆային ներկայացման կառուցումը, սիմուլյացիան և ԱԹՍ-ների ապակենտրոնացված գործողությունների կազմակերպումը:
- [300] աշխատանքում մշակվել են ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող երամների գործարկման ալգորիթմներ, որոնք ապահովում են տեղեկատվության լրիվ փոխանակում: Այս արդյունքները կապում են երկրորդ գլխում դիտարկված gossip/broadcast սխեմաների տեսական հիմքերը ԱԹՍ-ների ներբազմային հաղորդակցության գործնական պահանջների հետ:
- [302] աշխատանքում ներկայացվել են ինքնակազմակերպվող ԱԹՍ-ների երամների ամպային մաթեմատիկական մոդելները, դրանց նախագծումը և վերլուծությունը: Այս աշխատանքում ձևակերպվում է այն մոտեցումը, որով ամպային միջավայրը օգտագործվում է ոչ թե անընդհատ կենտրոնացված կառավարման, այլ պլանավորման, սիմուլյացիայի, վերահսկման և տվյալների մշակման համար:

- [303] աշխատանքում դիտարկվել է ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող երամների առաքելության նախապատրաստման խնդիրը բազմօգտատեր հարթակի վրա: Ներկայացվում են տարածքի ընտրության, mission graph-ի կառուցման, պլանի նախնական ստուգման և օգտատերերի համատեղ աշխատանքի մեխանիզմները:
- [304] աշխատանքում իրականացվել է ավտոմատային մեխանիզմ ինքնակազմակերպվող Drone Platform-ի համար: Այս արդյունքը կարևոր է հարթակի ներսում ալգորիթմական կանոնների ծրագրային իրականացման և ԱԹՍ-ների վարքի դետերմինիստական կազմակերպման տեսանկյունից:
- [305], [306] և [307] աշխատանքներում տրվել է ակնարկ ճշգրիտ լուծվող ցանցային մոդելների համար ստացված արդյունքների վերաբերյալ, ինչպես նաև նկարագրվել է rotor-router մեխանիզմով աշխատող ԱԹՍ-ների երամի մոլոտիլեյրյան դեգերման միջոցով մշտադիտարկում կատարելու հնարավորությունը: Տրվել է նաև ակնարկ ԱԹՍ-ների երամի մոդելավորման և կառավարման հարթակի ֆունկցիոնալության մասին: Նկարագրվել է երամում վթարակայուն ինֆորմացիայի փոխանակման մեխանիզմը:
- [308] աշխատանքում մանրամասն ներկայացվել է վթարակայուն gossip գրաֆների պատկերման, խմբագրման և մոդելավորման գործիքը: Այս արդյունքը լրացնում է երկրորդ բաժնում նկարագրված Graph Plotter փաթեթի ֆունկցիոնալությունը և օգտագործվում է ԱԹՍ-ների երամներում ինֆորմացիայի վթարակայուն տարածման սխեմաների կառուցման համար:
- [301],[309],[313],[316],[317],[318] և [323] աշխատանքներում ուսումնասիրվել են ինքնակազմակերպվող աերոֆիզիկական կիբեռնամակարգերի (aero-physical cyber systems) և ԱԹՍ-ների երամների անվտանգության ապահովման խնդիրները: Մասնավորապես, դիտարկվել են գաղտնի հաշվարկների, բանալիների բաշխման, բազմակողմ հաշվարկների (multi-party computation) և խափանումների նկատմամբ կայուն նույնականացման (robust authentication) մեխանիզմները: Այս աշխատանքները ձևավորում են մշակված հարթակի անվտանգության ենթահամակարգի տեսական, ալգորիթմական և ծրագրային հիմքերը:
- [310] և [311] աշխատանքներում զարգացվել են algorithm-driven multi-user platform-ի և client-server համակարգի միջոցով բաշխված առաջադրանքների կոորդինացման սկզբունքները: Դրանք նկարագրում են հարթակի գործառնական կառուցվածքը, առաքելության վիճակի պահպանումը և ԱԹՍ-ների ապակենտրոնացված գործողությունների կազմակերպումը:
- [312] աշխատանքում դիտարկվել է Raspberry Pi-ի կիրառմամբ copter UAV-ի տեսողական տվյալների վրա հիմնված դիրքի կայունացման (vision-based hover stabilization) խնդիրը GNSS ազդանշանի բացակայության պայմաններում: Այս արդյունքը կարևոր է մշակված հարթակի գործնական կիրառելիության տեսանկյունից, քանի որ ինքնակազմակերպվող ԱԹՍ-ների երամները պետք է կարողանան գործել նաև այնպիսի միջավայրերում, որտեղ գլոբալ նավիգացիոն

համակարգերը հասանելի չեն (GNSS-denied), խափանված են կամ բավարար հուսալիություն չեն ապահովում:

- [314] և [321] աշխատանքներում ներկայացվել են ԱԹՍ-ների երամի վարքի իրական ժամանակում մոդելավորման (real-time swarm behavior simulation) և դերերի դինամիկ բաշխման ու վերակազմակերպման (dynamic role assignment/reconfiguration) մեխանիզմները: Դրանք հնարավորություն են տալիս առաքելության կատարման ընթացքում գնահատել ԱԹՍ-ների ընթացիկ վարքը, անհրաժեշտության դեպքում վերահաշվարկել առանձին ԱԹՍ-ների դերերը և պահպանել համակարգի գործառնական շարունակականությունը խափանումների, կապի կորուստների կամ միջավայրի փոփոխվող պայմանների դեպքում:
- [315] և [320] աշխատանքներում դիտարկվել են շարժունակությանը հարմարեցված գրաֆների վերակազմակերպման (mobility-aware graph restructuring), կոնֆլիկտները նվազեցնող համակարգման (conflict-minimizing coordination), անընդհատ մշտադիտարկման (continuous monitoring) և աշխարհագրական հղմամբ համայնապատկերի կառուցման (geo-referenced panorama construction) խնդիրները: Ստացված արդյունքները կարևոր են մեծ տարածքների անընդհատ դիտարկման, շարժական ԱԹՍ-ների երամների դինամիկ գրաֆային ներկայացումների վերակառուցման, թռիչքային առաջադրանքների ընթացքում կոնֆլիկտների նվազեցման և հավաքված պատկերային տվյալների հետառաքելական մշակման համար:
- [319] աշխատանքում ներկայացվել է ինքնակազմակերպված ԱԹՍ-ների երամի առաջադրանքների կազմակերպման և կառավարման համար բազմօգտատեր ծրագրային համակարգ: Այն ամփոփում է հարթակի ինժեներական բաղադրիչների մի մասը և կապում է առաքելության նախագծումը, օգտատերերի համագործակցությունը, ԱԹՍ-ների լոկալ տեղաշարժը և ամպային վերահսկումը մեկ միասնական համակարգում:
- [322] աշխատանքում ուսումնասիրվել են ինքնակազմակերպվող երամներում բացատրելի (explainable) և վարքագծային տեղեկության վրա հիմնված որոշումների ընդունման (behavior-aware decision making) մոտեցումները: Այս ուղղությունը կարևոր է այն տեսանկյունից, որ մշակված հարթակի վերահսկման, մոնիտորինգի և որոշումների աջակցության շերտերը հետագայում կարող են համալրվել բացատրելի մեխանիզմներով, որոնք հաշվի են առնում ԱԹՍ-ների վարքագծային առանձնահատկությունները, առաքելության ընթացքը և համակարգի դինամիկ վիճակը:
- [297],[309],[313] և [318] հոդվածներում բերված հետազոտությունները ներառել են նաև ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող երամի տվյալների և հաղորդակցության պաշտպանության գաղտնագրային մեթոդներ: Ներկայացված է երամի ապակենտրոն տեղեկատվական պաշտպանության գրոյակական վստահության մոտեցում, որը ներառում է նաև թռիչքի ընթացքում ԱԹՍ-ների անդամակցության

հավաստիացում: Առաջարկվել է ներդնել երամի բլոկչեյն՝ առաքելության իրականացման ընթացքում առանձին ԱԹՍ-ների միջև փոխանակվող ինֆորմացիայի վավերացման նպատակով: Ներկայացված է երամի մասնակիցների միջև բազմակողմանի հաշվարկների պաշտպանված իրականացման մեխանիզմ, ինչպես նաև երամի մասնակիցների միջև գաղտնագրային բանալիների բաշխումը:

3.5. Կիրառված թվային մոդելավորման մեթոդներ և մշակված հաշվարկային ալգորիթմներ

Տեսական հետազոտությունների իրականացման, առաջադրված հիպոթեզների ստուգման և կիրառական համակարգերի նախնական մոդելավորման համար մշակվել և կիրառվել են մի շարք թվային մեթոդներ ու հաշվարկային ալգորիթմներ: Դրանք օգտագործվել են ինչպես ճշգրիտ լուծվող ցանցային մոդելների ուսումնասիրության, այնպես էլ ինֆորմացիայի տարածման սխեմաների և ԱԹՍ-ների երամային վարքի մոդելավորման համար:

- Մոնտե Կառլոյի մեթոդի զուգահեռ ալգորիթմը՝ ArmCluster, Aznavour և այլ բազմապրոցեսորային բարձր արտադրողականությամբ հաշվողական համակարգերի վրա մոդելավորման համար: Ստացված թվային արդյունքները թույլ են տվել ստուգել անալիտիկ ճանապարհով ստացված ճշգրիտ արդյունքները, իսկ դրանց բացակայության պայմաններում առաջ քաշել նոր հիպոթեզներ:
- Ավագահատիկների մոդելում փլուզման պրոցեսի օպտիմալ ալգորիթմը, որը իրականացվել է ֆրոնտալ բջջային ավտոմատի միջոցով [293] - [295]:
- Ջնջված ցիկլերով դեգերման համար մոդելավորման ալգորիթմը: Այդ դեգերման հետագիծը ստացվում է ցանցի վրա պարզ սիմետրիկ պատահական դեգերումից՝ պայմանով, որ բոլոր փակ ցիկլերը ջնջվում են ժամանակագրական կարգով՝ անմիջապես առաջանալուց հետո:
- Տվյալ գրաֆի վրա ուղղորդված ծածկող ծառերի թվարկման համար Վիլսոնի ալգորիթմը [81] - [85]: Այն թույլ է տալիս գեներացնել ուղղորդված ծածկող ծառ նախապես սահմանված կշռային բաշխման համաձայն: Այդ բաշխման մեջ յուրաքանչյուր ծածկող ծառի կշիռը սահմանվում է որպես տվյալ ծառին պատկանող ուղղորդված կողերին վերագրված կշիռների արտադրյալ, իսկ ծառի ընտրության հավանականությունը համեմատական է այդ կշռին: Եթե բոլոր կողերին վերագրված կշիռները հավասար են, ապա գեներացվում է այսպես կոչված հավասարաչափ պատահական ծածկող ծառ, այսինքն՝ ծածկող ծառերի բազմության վրա հավասարաչափ բաշխման համաձայն ընտրված ծառ: Վիլսոնի ալգորիթմը հիմնված է ջնջված ցիկլերով դեգերման վրա և հնարավորություն է

տալիս գեներացնել ոչ միայն ամբողջ ծածկող ծառը, այլև նախապես ընտրված գազաթների ենթաբազմությունը պարունակող ենթածառ: Ստացված ենթածառի բաշխումը համընկնում է այն բաշխման հետ, որը կունենար նույն ենթածառը ամբողջ պատահական ծածկող ծառի մեջ: Այս հատկությունը թույլ է տալիս ուսումնասիրել ծածկող ծառի մասնակի կառուցվածքային բնութագրեր՝ առանց ամբողջ ծառի գեներացման: Այդպիսի բնութագրերից են՝ տվյալ երկու կետերի միջև ուղղորդված ճանապարհի լինելու հավանականությունը, երկու կամ ավել ճյուղերի կորելյացիոն ֆունկցիան, տվյալ գազաթի նախորդ հանդիսացող հարևանների (predecessors) բաշխումը և այլն:

- Իզինգի և Փոթսի սպինային մոդելների թվային ուսումնասիրության համար Մետրոպոլիսի Մոնտե Կառլոյի ալգորիթմը, որը թույլ է տալիս գեներացնել կոնֆիգուրացիաներ Բուցման-Գիբբսի բաշխման համաձայն: Մյուս կողմից, այդ մոդելների ընդհանրացված վիճակագրական գումարը (ծնորդ ֆունկցիան) ներկայացվում է տվյալ ցանցի ենթագրաֆների գումարի տեսքով և արտահայտվում է Տաթթի բազմանդամի, այսինքն՝ դիֆերոմատիկ բազմանդամի միջոցով: Օգտագործելով այդ գումարի համար հայտնի կցման-արտաքսման թեորեմը՝ հնարավորություն է ընձեռնվում ռեկուրսիվ ճանապարհով ստանալ վիճակագրական գումարը:
- Ստեղծված Gossip Plotter գրաֆիկական ծրագրային փաթեթը [286], որը նախատեսված է գրաֆների պատկերման, դրանց gossip հատկությունների ստուգման, gossip-վթարակայունության աստիճանի որոշման, ինչպես նաև ինֆորմացիայի փոխանցման տարբեր սխեմաների և դրանց հատկությունների մոդելավորման համար: Ծրագրային փաթեթի միջոցով ստացված թվային արդյունքները թույլ են տվել ճշգրտել օպտիմալ k -վթարակայուն gossip և այլ սխեմաներում անհրաժեշտ կողերի քանակի, տակտերի և ընդհանուր ժամանակի, ինչպես նաև այդ պարամետրերի միաժամանակյա մինիմալացման վերին գնահատականները: Ծրագրային փաթեթը նաև օժտված է գրաֆների gossip հատկությունը պահպանող permute higher/lower հատուկ գործողություններ (ձևափոխություններ) կատարելու հնարավորությամբ: Այն ոչ միայն թույլ է տալիս ռեկուրսիվ ճանապարհով ապացուցել տվյալ գրաֆի gossip հատկությունը, այլ կառուցել անհրաժեշտ կառուցվածքային տեսք ունեցող նոր gossip սխեմաներ՝ տրված կապերով համակարգում ինֆորմացիայի լրիվ փոխանակումը օպտիմալ կազմակերպելու նպատակով: Այդ գործողության կիրառումը k -վթարակայուն որոշ սխեմաների վրա նույնպես թույլ է տալիս ստանալ նոր դասերի սխեմաներ՝ առանց իջեցնելու վթարակայունության աստիճանը:

ԵԶՐԱԿԱՑՈՒԹՅՈՒՆ

Ատենախոսությունում ներկայացված աշխատանքների շրջանակներում ուսումնասիրվել են հավասարակշիռ և անհավասարակշիռ վիճակագրական մեխանիկայի ճշգրիտ լուծվող ցանցային մոդելներ, ինքնակազմակերպված կրիտիկականության երևույթի, քվագիպատահական դեգերման և ինֆորմացիայի լրիվ փոխանակման օպտիմալ սխեմաների մաթեմատիկական օրինաչափությունները:

Ստացված տեսական արդյունքների հիման վրա մշակվել և իրականացվել են թվային մոդելավորման, ալգորիթմական հետազոտման և գրաֆային կառուցվածքների վերլուծության ծրագրային գործիքներ: Այդ գործիքները հնարավորություն են տալիս ստուգել առաջարկված մաթեմատիկական մոդելների հատկությունները, իրականացնել մեծածավալ հաշվարկային փորձարկումներ և գնահատել դրանց կիրառելիությունը բարդ բազմաազենտային համակարգերում:

Աշխատանքի կիրառական արդյունքներից է ինքնավար ԱԹՍ-ների ինքնակազմակերպվող ապակենտրոնացված երամների համար մշակված ալգորիթմական և ծրագրային հարթակը, որը նախատեսված է տարածքների արդյունավետ վերահսկման, բազմաազենտային գործողությունների համաձայնեցման և ստացված ինֆորմացիայի անխափան ու դիմակայուն փոխանցման համար:

Ատենախոսությունում ստացված արդյունքները շարադրված են 1.2, 2.2 և 3.2 - 3.4 ենթաբաժիններում:

Հետազոտությունների արդյունքները հրատարակվել են 63 աշխատանքներում [266]-[328], որոնցից 5-ը կատարվել են հեղինակի կողմից անհատապես [266], [305], [306], [307] և [308]:

Աշխատանքի արդյունքների զեկուցումները

Ատենախոսության հիմնական արդյունքները զեկուցվել են տարեկան ամփոփիչ գիտաժողովների, CSIT, MMCP, ICECET և այլ պարբերաբար անցկացվող միջազգային գիտաժողովներում, ինչպես նաև ներկայացվել են IEEE, AIP Conference Proceedings և այլ ժողովածուներում հրատարակված աշխատանքներում:

- ՀՀ ԳԱԱ Մաթեմատիկական և տեխնիկական գիտությունների բաժանմունքի «Տարեկան ամփոփիչ ընդհանուր ժողով - 2014»
- ՀՀ ԿԳՄՄ Կրթության և գիտության պետական կոմիտեի կողմից անց կացվող «Ամենամյա ամփոփիչ գիտաժողով - 2025»
- International Conference on Computer Science and Information Technology (CSIT-2013, CSIT-2015, CSIT-2017, CSIT-2023, CSIT-2025), Երևան, Հայաստան

- Միջազգային գիտաժողով “Computer Science and Information Technology” (CSIT-2024, CSIT-2026), Թբիլիսի, Վրաստան
- International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET-2025), Փարիզ, Ֆրանսիա
- International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET-2026), Հռոմ, Իտալիա
- International Conference on Mathematical Modelling and Computational Physics (MMCP 2024), Երևան, Հայաստան
- International Conference on Natural Language Processing and Machine Learning (NLPML 2023), Ցյուրիխ, Շվեյցարիա

Արդյունքները ներկայացվել և քննարկվել են նաև գիտական սեմինարների և մասնագիտական քննարկումների ընթացքում՝ հետևյալ և այլ գիտական հաստատություններում.

- ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ (ԻԱՊԻ, Երևան, Հայաստան)
- Ա.Ի. Ալիխանյանի անվան ազգային գիտական լաբորատորիա (Երևանի ֆիզիկայի ինստիտուտ, Երևան, Հայաստան)
- ՀՀ ԳԱԱ ֆիզիկայի կիրառական պրոբլեմների ինստիտուտ (ՖԿՊԻ, Երևան, Հայաստան)
- Միջուկային հետազոտությունների միացյալ ինստիտուտի Բոգոլյուբովի անվան տեսական ֆիզիկայի լաբորատորիա (JINR BLTP, Դուբնա, Ռուսաստան)
- Ռուսաստանի գիտությունների ակադեմիայի Լեբեդևի անվան ֆիզիկայի ինստիտուտ (LPI RAS, Մոսկվա, Ռուսաստան)
- Լյուվենի համալսարանի Մաթեմատիկայի և ֆիզիկայի հետազոտությունների ինստիտուտ (UCL IRMP, Լյուվեն, Բելգիա)
- Թուլուզի ինֆորմատիկայի հետազոտությունների ինստիտուտ (IRIT, Թուլուզ, Ֆրանսիա)

- Օրսեի տեսական ֆիզիկայի լաբորատորիա (LPT, Օրսե, Ֆրանսիա)
- Բոննի համալսարանի ֆիզիկայի ինստիտուտ (Uni Bonn, Բոնն, Գերմանիա)
- Վուպերտալի համալսարանի տեսական ֆիզիկայի բաժին (BUW, Վուպերտալ, Գերմանիա)
- Դրեզդենի տեխնիկական համալսարանի ֆիզիկայի ֆակուլտետ (TUD, Դրեզդեն, Գերմանիա)
- Պրահայի Չեխական տեխնիկական համալսարանի միջուկային գիտությունների և ֆիզիկական ճարտարագիտության ֆակուլտետ (FNSPE CTU, Պրահա, Չեխիա)

Գիտական ծրագրեր

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում կատարված հետազոտությունները տարբեր տարիներին իրականացվել կամ աջակցություն են ստացել հետևյալ գիտական ծրագրերի շրջանակներում.

ՀՀ ԿԳՄՍՆ Բարձրագույն կրթության և գիտության կոմիտեի կողմից ֆինանսավորված գիտական դրամաշնորհային ծրագրեր

- 2025. «Ասպիրանտների և երիտասարդ հայցորդների հետազոտությունների աջակցության ծրագիր 2025», 25AA-1B027, ղեկավար, ասպիրանտ՝ Արտյոմ Լազյան
- 2025. «Ասպիրանտների և երիտասարդ հայցորդների հետազոտությունների աջակցության ծրագիր 2025», 25AA-1B028, ղեկավար, ասպիրանտ՝ Ագիթ Աթաշյան
- 2025. «Ասպիրանտների և երիտասարդ հայցորդների հետազոտությունների աջակցության ծրագիր 2025», 25AA-1B031, ղեկավար, ասպիրանտ՝ Դավիթ Հայրապետյան
- 2025-2027. «Փորձարարական մշակումների նախագծեր 2025», 25EDP-1B018, մասնակից
- 2024-2026. «Երկակի նշանակության գիտական ծրագրեր 2024», 24DP-1B016, մասնակից
- 2021-2026. «Առաջատար հետազոտությունների աջակցության ծրագիր», 21AG-1B052, մասնակից

- 2020-2023. «Արհեստական բանականություն և տվյալագիտություն», «Քվանտային տեխնոլոգիաներ», «Ռոբոտատեխնիկա» մասնագիտություններով գիտական ծրագիր, ենթաթեմա՝ Համագործակցային ռոբոտատեխնիկա և ռոբոտների երամներ (Cooperative robotics and robot swarms), ղեկավար, 20TTAT-RBe016
- 2017. «Արդյունավետ երիտասարդ գիտաշխատող 2017», 17YPR-1C0021
- 2016-2018. «Երիտասարդ գիտաշխատողների հետազոտությունների աջակցության ծրագիր», ղեկավար, 16YR-1B008
- 2015. «Արդյունավետ երիտասարդ գիտաշխատող 2015», 15YPR-1B0001
- 2013-2015. «Գիտական և գիտատեխնիկական գործունեության պայմանագրային (թեմատիկ) ֆինանսավորման ծրագիր», ղեկավար, 13-1B170

Մասնակցություն արտասահմանյան գիտական դրամաշնորհային ծրագրերին

- 2009-2011. Belgian Interuniversity Attraction Poles Program P6/02, NOSY network
- 2009-2011. Russian Foundation for Basic Research, Grant No 09-01-00271a
- 2006-2008. Russian Foundation for Basic Research, Grant No 06-01-00191a
- 2008. Dynasty Foundation Scholarship, Program for Supporting Young Physicists
- 2008. Bogoliubov Scholarship for students and postgraduates

- [1] E. Ising, “Beitrag zur theorie des ferromagnetismus”, Z. Phys. 31, 253–258 (1925).
- [2] R. Peierls, “On Ising’s model of ferromagnetism”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 32, 477–481 (1936).
- [3] L. Onsager, “Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder transition”, Phys. Rev. 65, 117–149 (1944).
- [4] R.B. Potts, “Some generalized order-disorder transformations”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 48, 106–109 (1952).
- [5] B.M. McCoy and T.T. Wu, “Two-dimensional Ising model”, Harvard University Press, Cambridge (1973).
- [6] R.J. Baxter, “Exactly solved models in statistical mechanics”, Academic Press, London (1982).
- [7] F.Y. Wu, “The Potts model”, Rev. Mod. Phys. 54(1), 235–268 (1982).
- [8] C. Fortuin and P. Kasteleyn, “On the random-cluster model. I. Introduction and relation to other models”, Physica 57, 536–564 (1972).
- [9] R. Shrock, “Exact Potts model partition functions on ladder graphs”, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 283(3–4), 388–446 (2000).
- [10] N.S. Ananikian and N.Sh. Izmailian, “Topological aspects of gauge and spin Potts models”, Phys. Lett. B 151, 142–144 (1985).
- [11] N.S. Ananikian and N.Sh. Izmailian, “Topological aspects of Potts gauge models and their $1/Q$ expansion”, Physics of Atomic Nuclei 56, 216 (1993).
- [12] N.S. Ananikian and R.R. Shcherbakov, “Tricritical phenomena in a $Z(3)$ lattice gauge theory”, J. Phys. A: Math. Gen. 27, L887–L890 (1994).
- [13] N.S. Ananikian and R.R. Shcherbakov, “Reduction of a $Z(3)$ gauge theory on the flat lattices to the spin-1 BEG model”, Phys. Lett. A 200, 27–30 (1995).

- [14] N.S. Ananikian, R.G. Ghulghazaryan, N. Sh. Izmailian and R. R. Shcherbakov, “Exact solution of a $Z(4)$ gauge Potts model on planar lattices”, *Phys. Rev. E* 60, 5106 (1999).
- [15] M. Fisher, “On the dimer solution of planar Ising models”, *J. Math. Phys.* 7, 1776–1781 (1966).
- [16] C.A. Hurst and H.S. Green, “New solution of the Ising problem for a rectangular lattice”, *J. Chem. Phys.* 33(4), 1059–1062 (1960).
- [17] P.W. Kasteleyn, “The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice”, *Physica* 27(12), 1209–1225 (1961).
- [18] P.W. Kasteleyn, “Dimer statistics and phase transitions”, *J. Math. Phys.* 4, 287–293 (1963).
- [19] R.H. Fowler and G.S. Rushbrooke, “An attempt to extend the statistical theory of perfect solutions”, *Trans. Faraday Soc.* 33, 1272–1294 (1937).
- [20] H.N.V. Temperley and M.E. Fisher, “Dimer problem in statistical mechanics – An exact result”, *Phil. Mag.* 6, 1061–1063 (1961).
- [21] M.E. Fisher, “Statistical mechanics of dimers on a plane lattice”, *Phys. Rev.* 124, 1664–1672 (1961).
- [22] M.E. Fisher and J. Stephenson, “Statistical mechanics of dimers on a plane lattice. II. Dimer correlations and monomers”, *Phys. Rev.* 132(4), 1411–1431 (1963).
- [23] H.N.V. Temperley, “Combinatorics: Proceedings of the British Combinatorial Conference 1973”, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 13, 202–204 (1974).
- [24] E.W. Montroll, “Lattice statistics”, in *Applied combinatorial mathematics*, ed. E.F. Beckenbach, John Wiley & Sons, New York (1964).
- [25] F.Y. Wu, “Dimers on two-dimensional lattices”, *Int. J. Mod. Phys. B* 20(32), 5357–5371 (2006).
- [26] R. Kenyon, “Dominos and the Gaussian free field”, *Ann. Probab.* 29, 1128–1137 (2001).

- [27] R. Kenyon, “Lectures on dimers”, arXiv:0910.3129 [math.PR] (2009).
- [28] R. Burton and R. Pemantle, “Local characteristics, entropy and limit theorems for spanning trees and domino tilings via transfer-impedances”, *Ann. Probab.* 21(3), 1329–1371 (1993).
- [29] R.W. Kenyon, J.G. Propp and D.B. Wilson, “Trees and matchings”, *Electron. J. Combin.* 7(1), R25 (2000); arXiv:math.CO/9903025.
- [30] R.W. Kenyon and S. Sheffield, “Dimers, tilings, and trees”, *J. Combin. Theory Ser. B* 92, 295–317 (2004).
- [31] R. Kenyon, “The asymptotic determinant of the discrete Laplacian”, *Acta Math.* 185(2), 239–286 (2000).
- [32] R.E. Hartwig, “Monomer-dimer systems and permanent inequalities”, *J. Math. Phys.* 7, 286–299 (1966).
- [33] W.J. Tseng and F.Y. Wu, “Dimers on two-dimensional lattices with vacancies”, *J. Stat. Phys.* 110, 671–689 (2003).
- [34] F.Y. Wu, “Pfaffian solution of a dimer-monomer problem: Single monomer on the boundary”, *Phys. Rev. E* 74, 020104(R) (2006); *Phys. Rev. E* 74, 039907 (2006); arXiv:cond-mat/0607647.
- [35] J. Bouttier, M. Bowick, E. Guitter and M. Jeng, “Vacancy localization in the square dimer model”, *Phys. Rev. E* 76, 041140 (2007).
- [36] S. Plouffe, “Inverse symbolic calculator”, <http://pi.lacim.uqam.ca/>.
- [37] G. Szegő, “On certain Hermitian forms associated with the Fourier series of a positive function”, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund* 1952, 228–238 (1952).
- [38] H. Widom, “On the limit of block Toeplitz determinants”, *Amer. J. Math.* 95, 333–383 (1973).
- [39] C.A. Tracy and H. Widom, “On the limit of some Toeplitz-like determinants”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* 23(4), 1194–1196 (2002)

- [40] D. Bump and P. Diaconis, “Toeplitz minors”, J. Combin. Theory Ser. A 97, 252–271 (2002).
- [41] P.W. Kasteleyn and C.M. Fortuin, “Phase transitions in lattice systems with random local properties”, J. Phys. Soc. Jpn. Suppl. 26, 11–14 (1969).
- [42] W.T. Tutte, “A contribution to the theory of chromatic polynomials”, Canad. J. Math. 6, 80–91 (1954).
- [43] W.T. Tutte, “On dichromatic polynomials”, J. Combin. Theory 2, 301–320 (1967).
- [44] F. Harary, “Graph theory”, Addison–Wesley, Reading, Mass. (1969).
- [45] W. Feller, “An introduction to probability theory and its applications”, Vol. I (3rd ed.), John Wiley & Sons, New York–London–Sydney (1968); Vol. II (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York–London–Sydney (1971).
- [46] N. Biggs, “The Tutte polynomial as a growth function”, J. Alg. Combin. 10(2), 115–133 (1998).
- [47] H. Kesten, “Percolation Theory for Mathematicians”, Birkhäuser, Boston (1982).
- [48] G. Grimmett, “Percolation”, Springer, Berlin (1999).
- [49] P.J. Flory, “Molecular size distribution in three dimensional polymers”, J. Am. Chem. Soc. 63, 3083–3090 (1941).
- [50] B.M. McCoy and T.T. Wu, “The Two-Dimensional Ising Model”, Harvard University Press, Cambridge (1973).
- [51] J. Ashkin and E. Teller, “Statistics of two-dimensional lattices with four components”, Phys. Rev. 64, 178–184 (1943).
- [52] P.Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, “Conformal Field Theory”, Springer-Verlag, New York (1997).
- [53] G. Kirchhoff, “Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird”, Ann. Phys. Chem. 72, 497–508 (1847). English transl. “On the solution of the equations

obtained from the investigation of the linear distribution of galvanic currents”, IRE Trans. Circuit Theory 5, 4–7 (1958).

- [54] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise”, Phys. Rev. Lett. 59(4), 381–384 (1987).
- [55] P. Bak, C. Tang and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality”, Phys. Rev. A 38(1), 364–374 (1988).
- [56] K. Wiesenfeld, J. Theiler and B. McNamara, “Self-organized criticality in a deterministic automaton”, Phys. Rev. Lett. 65(8), 949–952 (1990).
- [57] M. Sahimi, M.C. Robertson and C.G. Sammis, “Fractal distribution of earthquake hypocenters and its relation to fault patterns and percolation”, Phys. Rev. Lett. 70(14), 2186–2189 (1993).
- [58] P. Alstrøm and J. Leão, “Self-organized criticality in the “game of life””, Phys. Rev. E 49(4), R2507–R2508 (1994).
- [59] B. Drossel and F. Schwabl, “Self-organized criticality in a forest-fire model”, Physica A 191(1), 47–50 (1992).
- [60] B. Drossel and F. Schwabl, “Self-organized critical forest-fire model”, Phys. Rev. Lett. 69(11), 1629–1632 (1992).
- [61] S.L. Ginzburg, “Self-organization of the critical state in Josephson lattices and granulated superconductors”, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 106(2), 607–626 (1994).
- [62] T. Hwa and M. Kardar, “Dissipative transport in open systems: An investigation of self-organized criticality”, Phys. Rev. Lett. 62(16), 1813–1816 (1989).
- [63] H. Takayasu and M. Matsuzaki, “Dynamical phase transition in threshold elements”, Phys. Lett. A 131(4), 244–247 (1988).
- [64] P. Grassberger and S.S. Manna, “Some more sandpiles”, J. Phys. France 51, 1077–1098 (1990).
- [65] A. Fey, L. Levine and D. B. Wilson, “Driving sandpiles to criticality and beyond”, Phys. Rev. Lett. 104, 145703 (2010).

- [66] A. Fey, L. Levine and D. B. Wilson, “Approach to criticality in sandpiles”, *Phys. Rev. E* 82(3), 031121 (2010).
- [67] L. Levine, “Threshold state and a conjecture of Poghosyan, Poghosyan, Priezzhev and Ruelle”, *Commun. Math. Phys.* 335(2), 1003–1017 (2015).
- [68] A. Fey, R. Meester and F. Redig, “Stabilizability and percolation in the infinite volume sandpile model”, *Ann. Probab.* 37(2), 654–675 (2009).
- [69] D. Dhar and R. Ramaswamy, “Exactly solved model of self-organized critical phenomena”, *Phys. Rev. Lett.* 63(16), 1659–1662 (1989).
- [70] D. Dhar, “Self-organized critical state of sandpile automaton models”, *Phys. Rev. Lett.* 64(14), 1613–1616 (1990).
- [71] S.N. Majumdar and D. Dhar, “Abelian sandpile model on the Bethe lattice”, *J. Phys. A* 23(19), 4333–4350 (1990).
- [72] S.N. Majumdar and D. Dhar, “Height correlations in the Abelian sandpile model”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 24(7), L357–L362 (1991).
- [73] V. B. Priezzhev, “Exact height probabilities in the Abelian sandpile model”, *Physica Scripta* T49, 663–666 (1993).
- [74] V.B. Priezzhev, “Structure of two-dimensional sandpile. I. Height probabilities”, *J. Stat. Phys.* 74(5), 955–979 (1994).
- [75] S.N. Majumdar and D. Dhar, “Equivalence between the Abelian sandpile model and the $q \rightarrow 0$ limit of the Potts model”, *Physica A* 185(1), 129–145 (1992).
- [76] C.M. López, “Chip firing and the Tutte polynomial”, *Ann. Combin.* 1(1), 253–259 (1997).
- [77] E.V. Ivashkevich and V.B. Priezzhev, “Introduction to the sandpile model”, *Physica A* 254(1), 97–116 (1998).
- [78] S. Caracciolo and A. Sportiello, “Exact integration of height probabilities in the Abelian sandpile model”, *J. Stat. Mech.* P09013 (2012).

- [79] X. Sun and D. B. Wilson, “Sandpiles and unicycles on random planar maps”, *Electron. Commun. Probab.* 21, 1–12 (2016).
- [80] D. Dhar, “Theoretical studies of self-organized criticality”, *Physica A* 369(1), 29–70 (2006).
- [81] A. Broder, “Generating random spanning trees”, in *30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE, 442–447 (1989).
- [82] D. Aldous, “The random walk construction of uniform spanning trees and uniform labelled trees”, *SIAM J. Discrete Math.* 3(4), 450–465 (1990).
- [83] R. Pemantle, “Choosing a spanning tree for the integer lattice uniformly”, *Ann. Probab.* 19(4), 1559–1574 (1991).
- [84] D.B. Wilson, “Generating random spanning trees more quickly than the cover time”, in *Proc. 28th Annual ACM Symp. on the Theory of Computing* (Philadelphia, PA), ACM, New York, 296–303 (1996).
- [85] J.G. Propp and D.B. Wilson, “How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph”, *J. Algorithms* 27(2), 170–217 (1998).
- [86] G.F. Lawler, “A self-avoiding random walk”, *Duke Math. J.* 47(3), 655–693 (1980).
- [87] S.N. Majumdar, “Exact fractal dimension of the loop-erased self-avoiding walk in two dimensions”, *Phys. Rev. Lett.* 68(15), 2329–2331 (1992).
- [88] O. Schramm, “Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees”, *Israel J. Math.* 118(1), 221–288 (2000).
- [89] L. Levine and Y. Peres, “The looping constant of $\mathbb{Z}^d$ ”, *Random Structures Algorithms* 45(1), 1–13 (2014).
- [90] R.W. Kenyon and D.B. Wilson, “Spanning trees of graphs on surfaces and the intensity of loop-erased random walk on planar graphs”, *J. Amer. Math. Soc.* 28, 985–1030 (2015).

- [91] M. Chan, T. Church and J. A. Grochow, “Rotor-routing and spanning trees on planar graphs”, *Int. Math. Res. Notices* 2015(11), 3225–3244 (2015).
- [92] A. Kassel and D.B. Wilson, “The looping rate and sandpile density of planar graphs”, *Amer. Math. Month.* 123(1), 19–39 (2016).
- [93] F. Spitzer, “Principles of random walk” (2nd ed.), Springer-Verlag, New York (1976).
- [94] G.F. Lawler, O. Schramm and W. Werner, “Conformal invariance of planar loop-erased random walks and uniform spanning trees”, *Ann. Probab.* 32, 939–995 (2004).
- [95] N.Sh. Izmailian, V.B. Priezzhev, P. Ruelle and C.-K. Hu, “Logarithmic conformal field theory and boundary effects in the dimer model”, *Phys. Rev. Lett.* 95(26), 260602 (2005).
- [96] S. Papanikolaou, E. Luijten and E. Fradkin, “Quantum criticality, lines of fixed points, and phase separation in doped two-dimensional quantum dimer models”, *Phys. Rev. B* 76(13), 134514 (2007).
- [97] A. Kassel, R. Kenyon and W. Wu, “Random two-component spanning forests”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 51(4), 1457–1464 (2015).
- [98] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory”, *Nucl. Phys. B* 241(2), 333–380 (1984).
- [99] H. Saleur, “Polymers and percolation in two dimensions and twisted $N = 2$ supersymmetry”, *Nucl. Phys. B* 382(3), 486–531 (1992).
- [100] E.V. Ivashkevich, “Correlation functions of dense polymers and $c = -2$ conformal field theory”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 32(9), 1691–1699 (1999).
- [101] P.A. Pearce and J. Rasmussen, “Solvable critical dense polymers”, *J. Stat. Mech.* P02015 (2007).
- [102] P.A. Pearce, J. Rasmussen and J.-B. Zuber, “Logarithmic minimal models”, *J. Stat. Mech.* P11017 (2006).

- [103] N. Read and H. Saleur, “Associative-algebraic approach to logarithmic conformal field theories”, Nucl. Phys. B 777(3), 316–351 (2007).
- [104] S. Mahieu and P. Ruelle, “Scaling fields in the two-dimensional Abelian sandpile model”, Phys. Rev. E 64, 066130 (2001).
- [105] P. Ruelle, “A $c = -2$ boundary changing operator for the Abelian sandpile model”, Phys. Lett. B 539 (1), 172–177 (2002).
- [106] N. S. Izmailian, V. B. Priezzhev and P. Ruelle, “Logarithmic conformal field theory and boundary effects in the dimer model”, SIGMA 3, 001 (2007).
- [107] J.G. Brankov, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev and I.Y. Tipunin, “Two-dimensional spanning webs as (1,2) logarithmic minimal model”, J. Stat. Mech. P11017 (2008).
- [108] M. Jeng, “Boundary conditions and defect lines in the Abelian sandpile model”, Phys. Rev. E 69, 051302 (2004).
- [109] G. Piroux and P. Ruelle, “Pre-logarithmic and logarithmic fields in a sandpile model”, J. Stat. Mech. (2004) P10005.
- [110] M. Jeng, “The four height variables, boundary correlations, and dissipative defects in the Abelian sandpile model”, Phys. Rev. E 71, 036153 (2005).
- [111] M. Jeng, “Conformal field theory correlations in the Abelian sandpile model”, Phys. Rev. E 71, 016140 (2005).
- [112] G. Piroux and P. Ruelle, “Boundary height fields in the Abelian sandpile model”, J. Phys. A: Math. Gen. 38, 1451–1459 (2005).
- [113] G. Piroux and P. Ruelle, “Logarithmic scaling for height variables in the Abelian sandpile model”, Phys. Lett. B 607, 188–196 (2005).
- [114] S. Moghimi-Araghi, M.A. Rajabpour and S. Rouhani, “Abelian sandpile model: A conformal field theory point of view”, Nucl. Phys. B 718, 362–370 (2005).
- [115] G. Piroux and P. Ruelle, “Logarithmic scaling for height variables in the Abelian sandpile model”, Phys. Lett. B 607, 188–196 (2005).

- [116] M. Jeng, G. Piroux and P. Ruelle, “Height variables in the Abelian sandpile model: scaling fields and correlations”, J. Stat. Mech. P10015 (2006).
- [117] M.A. Flohr and A. Müller-Lohmann, “Proposal for a conformal field theory interpretation of Watts’ differential equation for percolation”, J. Stat. Mech. (2005) P12004.
- [118] M.A. Flohr and A. Müller-Lohmann, “Notes on non-trivial and logarithmic CFTs with $c = 0$ ”, J. Stat. Mech. (2006) P04002.
- [119] P.A. Pearce and J. Rasmussen, “Solvable critical dense polymers”, J. Stat. Mech. P09002 (2007).
- [120] P. Mathieu and D. Ridout, “Logarithmic $M(2,3)$ models”, Nucl. Phys. B 801, 268–295 (2008).
- [121] M. Henkel, “Conformal invariance and critical phenomena”, Springer-Verlag, New York (1999).
- [122] V.B. Priezzhev, “Self-organized criticality in self-directing walks”, arXiv:cond-mat/9605094 (1996).
- [123] V.B. Priezzhev, D. Dhar, A. Dhar and S. Krishnamurthy, “Eulerian walkers as a model of self-organized criticality”, Phys. Rev. Lett. 77, 5079–5082 (1996).
- [124] A.M. Povolotsky, V.B. Priezzhev and R.R. Shcherbakov, “Dynamics of Eulerian walkers”, Phys. Rev. E 58, 5449–5454 (1998).
- [125] A.E. Holroyd, L. Levine, K. Mészáros, Y. Peres, J. Propp and D. B. Wilson, “Chip-firing and rotor-routing on directed graphs”, Progress in Probability 60, 331–364 (2008).
- [126] A.E. Holroyd and J. Propp, “Rotor walks and Markov chains”, in Algorithmic Probability and Combinatorics, Contemp. Math. 520, 105–126 (2010).
- [127] L. Levine and Y. Peres, “The rotor-router shape is spherical”, Math. Intelligencer 27(3), 9–11 (2005).

- [128] L. Levine and Y. Peres, “Strong spherical asymptotics for rotor-router aggregation and the divisible sandpile”, *Potential Anal.* 30(1), 1–27 (2009).
- [129] R. Kapri and D. Dhar, “Asymptotic shape of the region visited by an Eulerian walker”, *Phys. Rev. E* 80, 051118 (2009).
- [130] O. Angel and A. E. Holroyd, “Recurrent rotor-router configurations”, *J. Comb.* 3(2), 185–194 (2012).
- [131] W. Huss and E. Sava-Huss, “Transience and recurrence of rotor-router walks on directed covers of graphs”, *Electron. Commun. Probab.* 17(41), 1–13 (2012).
- [132] L. Florescu, S. Ganguly, L. Levine and Y. Peres, “Escape rates for rotor walks in $\mathbb{Z}^d$ ”, *SIAM J. Discrete Math.* 28(1), 323–334 (2014).
- [133] H. Freund and P. Grassberger, “The Red Queen’s walk”, *Physica A* 190, 218–237 (1992).
- [134] P. Grassberger, “The Bak-Sneppen model for punctuated evolution”, *Phys. Lett. A* 200, 277–282 (1995).
- [135] N.Sh. Izmailian, V.I.V. Papoyan, V.B. Priezhev and C.-K. Hu, “Self-organizing behavior in a lattice model for co-evolution of virus and immune systems”, *Phys. Rev. E* 75, 041104 (2007).
- [136] T.M. Liggett, “Interacting particle systems”, Springer Berlin Heidelberg (2005).
- [137] T.M. Liggett, “Stochastic interacting systems: Contact, voter and exclusion processes”, Springer, Berlin (1999).
- [138] H. Spohn, “Large scale dynamics of interacting particles”, Springer-Verlag (1991).
- [139] B. Schmittmann and R.K.P. Zia, “Statistical mechanics of driven diffusive systems”, in *Phase transitions and critical phenomena*, eds. C. Domb and J.L. Lebowitz, Vol. 17, Academic Press, New York (1995).
- [140] N. Rajewsky, L. Santen, A. Schadschneider and M. Schreckenberg, “The asymmetric exclusion process: Comparison of update procedures”, *J. Stat. Phys.* 92, 151–194 (1998).

- [141] G.M. Schütz, “Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium”, in *Phase transitions and critical phenomena*, eds. C. Domb and J.L. Lebowitz, Vol. 19, Academic Press, London (2001).
- [142] A. Rákos and G. M. Schütz, “Bethe ansatz and current distribution for the TASEP with particle-dependent hopping rates”, *Markov Processes Relat. Fields* 12, 323–334 (2006).
- [143] B. Derrida, “An exactly soluble non-equilibrium system: the asymmetric simple exclusion process”, *Phys. Rep.* 301, 65–83 (1998).
- [144] F. Spitzer, “Interaction of Markov processes”, *Adv. Math.* 5, 246–290 (1970).
- [145] J. Krug, “Boundary-induced phase transitions in driven diffusive systems”, *Phys. Rev. Lett.* 67(14), 1882–1885 (1991).
- [146] T. Sasamoto and H. Spohn, “One-dimensional Kardar–Parisi–Zhang equation: An exact solution and its universality”, *Phys. Rev. Lett.* 104, 230602 (2010).
- [147] M.R. Evans and T. Hanney, “Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38(19), R195–R239 (2005).
- [148] C.T. MacDonald, J.H. Gibbs and A.C. Pipkin, “Kinetics of biopolymerization on nucleic acid templates”, *Biopolymers* 6(1), 1–25 (1968).
- [149] D. Dhar, “An exactly solved model for interfacial growth”, *Phase Trans.* 9(1), 51–86 (1987).
- [150] L.H. Gwa and H. Spohn, “Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian”, *Phys. Rev. Lett.* 68(6), 725–728 (1992).
- [151] B. Derrida and J.L. Lebowitz, “Exact large deviation function in the asymmetric exclusion process”, *Phys. Rev. Lett.* 80(2), 209–213 (1998).
- [152] B. Derrida, M.R. Evans and D. Mukamel, “Exact diffusion constant for one-dimensional asymmetric exclusion models”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 26(19), 4911–4918 (1993).

- [153] B. Derrida, S.A. Janowsky, J.L. Lebowitz and E.R. Speer, “Exact solution of the totally asymmetric simple exclusion process: Shock profiles”, *J. Stat. Phys.* 73(5), 813–842 (1993).
- [154] M.R. Evans, D.P. Foster, C. Godrèche and D. Mukamel, “Asymmetric exclusion model with two species: Spontaneous symmetry breaking”, *J. Stat. Phys.* 80(1), 69–102 (1995).
- [155] C.N. Yang and C.P. Yang, “One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe’s hypothesis for ground state in a finite system”, *Phys. Rev.* 150, 321–327 (1966).
- [156] C.N. Yang and C.P. Yang, “One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. II. Properties of the ground-state energy per lattice site for an infinite system”, *Phys. Rev.* 150, 327–339 (1966).
- [157] A. Rákos and G.M. Schütz, “Bethe ansatz and current distribution for the TASEP with particle-dependent hopping rates”, *Markov Processes Relat. Fields* 12, 323–334 (2006).
- [158] G.M. Schütz, “Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process”, *J. Stat. Phys.* 88(1), 427–445 (1997).
- [159] V.B. Priezzhev, “Exact nonstationary probabilities in the asymmetric exclusion process on a ring”, *Phys. Rev. Lett.* 91(5), 050601 (2003).
- [160] J.G. Brankov, V.B. Priezzhev and R.V. Shelest, “Generalized determinant solution of the discrete-time totally asymmetric exclusion process and zero-range process”, *Phys. Rev. E* 69(6), 066136 (2004).
- [161] V.B. Priezzhev, “Non-stationary probabilities for the asymmetric exclusion process on a ring”, *Pramana J. Phys.* 64(6), 915–925 (2005); *Proceedings of STATPHYS 21* (2005).
- [162] A.M. Povolotsky and V.B. Priezzhev, “Determinant solution for the totally asymmetric exclusion process with parallel update”, *J. Stat. Mech.* P07002 (2006).
- [163] A.M. Povolotsky and J.F.F. Mendes, “Bethe ansatz solution of discrete time stochastic processes with fully parallel update”, *J. Stat. Phys.* 123(1), 125–166 (2006).

- [164] A.M. Povolotsky and V.B. Priezhev, “Determinant solution for the totally asymmetric exclusion process with parallel update: II. Ring geometry”, *J. Stat. Mech.* P08018 (2007).
- [165] I. Benjamini, P.A. Ferrari and C. Landim, “Asymmetric conservative processes with random rates”, *Stoc. Proc. Appl.* 61(2), 181–204 (1996).
- [166] J. Krug and P.A. Ferrari, “Phase transitions in driven diffusive systems with random rates”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 29(18), L465–L471 (1996).
- [167] B. Derrida and C. Appert, “Universal large-deviation function of the Kardar–Parisi–Zhang equation in one dimension”, *J. Stat. Phys.* 94, 1–30 (1999).
- [168] M.R. Evans, “Exact steady states of disordered hopping particle models with parallel and ordered sequential dynamics”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 30(16), 5669–5685 (1997).
- [169] K. Nagel and M. Schreckenberg, “A cellular automaton model for freeway traffic”, *J. Phys. I France* 2(12), 2221–2229 (1992).
- [170] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel and N. Ito, “Discrete stochastic models for traffic flow”, *Phys. Rev. E* 51(4), 2939–2949 (1995).
- [171] M.E. Fisher, “Walks, walls, wetting, and melting”, *J. Stat. Phys.* 34(5), 667–729 (1984).
- [172] M.R. Evans and T. Hanney, “Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38(19), R195–R240 (2005).
- [173] S. Grosskinsky, G.M. Schütz and H. Spohn, “Condensation in the zero range process: stationary and dynamical properties”, *J. Stat. Phys.* 113, 389–410 (2003).
- [174] C. Godrèche, “Dynamics of condensation in zero-range processes”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 36(23), 6313–6328 (2003).
- [175] E. Levine, D. Mukamel and G.M. Schütz, “Zero-range process with open boundaries”, *J. Stat. Phys.* 120(5), 759–778 (2005).
- [176] J. Kaupuzs, R. Mahnke and R.J. Harris, “Zero-range model of traffic flow”, *Phys. Rev. E* 72(5), 056125 (2005).

- [177] R.J. Harris, A. Rákos and G.M. Schütz, “Current fluctuations in the zero-range process with open boundaries”, *J. Stat. Mech.* P08003 (2005).
- [178] C. Godrèche and J.-M. Luck, “Dynamics of the condensate in zero-range processes”, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38(33), 7215–7237 (2005).
- [179] H. Bethe, “Zur Theorie der Metalle. I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette”, *Z. Phys.* 71, 205–226 (1931).
- [180] C. A. Tracy and H. Widom, “On the distribution of the lengths of the longest monotone subsequences in random words”, *Probab. Theory Relat. Fields* 119(3), 350–380 (2001).
- [181] X. Jin and S. G. Chan, “Unstructured Peer-to-Peer Network Architectures”, in *Handbook of Peer-to-Peer Networking*, Springer, 2010.
- [182] R. Schollmeier, “A Definition of Peer-to-Peer Networking for the Classification of Peer-to-Peer Architectures and Applications”, in *Proc. First International Conference on Peer-to-Peer Computing*, IEEE, 2002.
- [183] V.D. Blondel, J.M. Hendrickx, A. Olshevsky and J.N. Tsitsiklis, “Convergence in multiagent coordination, consensus, and flocking”, in *Proc. 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2005.
- [184] S. Tramp, P. Frischmuth, N. Arndt, T. Ermirov and S. Auer, “Weaving a distributed, semantic social network for mobile users”, in *The Semantic Web: Research and Applications*, ESWC 2011, pp. 200–214.
- [185] C. Lai, “Understanding the design of mobile social networking”, *M/C Journal* 10(1), 2007.
- [186] J.N. Tsitsiklis, “Problems in Decentralized Decision Making and Computation”, Ph.D. thesis, Laboratory for Information and Decision Systems, MIT, Cambridge, MA, 1984.
- [187] T. Tijdeman, “On a telephone problem”, *Nieuw Arch. Wisk.* (3) 19, 188–192 (1971).
- [188] B. Baker and R. Shostak, “Gossips and telephones”, *Discrete Mathematics* 2, 191–193 (1972).

- [189] A. Hajnal, E. C. Milner and E. Szemerédi, “A cure for the telephone disease”, Canadian Mathematical Bulletin 15, 447–450 (1972).
- [190] K. Lebensold, “Efficient communication by phone calls”, Studies in Applied Mathematics 52, 345–358 (1973).
- [191] R.T. Bumby, “A problem with telephones”, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 2, 13–18 (1981).
- [192] F. Harary and A. J. Schwenk, “The communication problem on graphs and digraphs”, Journal of the Franklin Institute 297, 491–495 (1974).
- [193] M.C. Golumbic, “The general gossip problem”, IBM Research Report RC 4977, 1974.
- [194] H. Landau, “On the spread of information with time and distance”, Bulletin of Mathematical Biophysics 15, 367–381 (1953).
- [195] H. Landau, “The distribution of completion times for random communication in task-oriented groups”, Bulletin of Mathematical Biophysics 16, 187–201 (1954).
- [196] A. Bavelas, “Communication patterns in task-oriented groups”, Journal of the Acoustical Society of America 22, 725–730 (1950).
- [197] A. Shimbel, “Applications of matrix algebra to communication nets”, Bulletin of Mathematical Biophysics 13, 165–178 (1951).
- [198] D.B. West, “Gossiping without duplicate transmissions”, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods 3, 418–419 (1982).
- [199] D.B. West, “A class of solutions to the gossip problem, Part 1”, Discrete Mathematics 39, 307–326 (1982).
- [200] D.B. West, “A class of solutions to the gossip problem, Part 2”, Discrete Mathematics 40, 87–113 (1982).
- [201] D.B. West, “A class of solutions to the gossip problem, Part 3”, Discrete Mathematics 40, 285–310 (1982).

- [202] J. Nieminen, “Time and call limited telephone problem”, IEEE Transactions on Circuits and Systems 34, 1129–1131 (1987).
- [203] R. Labahn, “Some minimum gossip graphs”, Networks 23, 333–341 (1993).
- [204] R. Labahn, “Kernels of minimum size gossip schemes”, Discrete Mathematics 143, 99–139 (1995).
- [205] A. Seress, “Gossiping old ladies”, Discrete Mathematics 46, 75–81 (1983).
- [206] A. Seress, “Quick gossiping without duplicate transmissions”, Graphs and Combinatorics 2, 363–383 (1986).
- [207] A. Seress, “Gossiping by conference calls”, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 22, 191–197 (1987).
- [208] A. Seress, “Quick gossiping by conference calls”, SIAM Journal on Discrete Mathematics 1, 109–120 (1988).
- [209] P. Schmitt, “Spreading information by conferences”, Discrete Mathematics 15, 305–306 (1976).
- [210] P. Fraigniaud, A. Liestman and D. Sotteau, “Open problems”, Parallel Processing Letters 3(4), 507–524 (1993).
- [211] “Gossip Protocol”, Wikipedia, available online.
- [212] D. Shah, “Gossip Algorithms”, Foundations and Trends in Networking 3(1), 1–125 (2009).
- [213] “Apache Gossip”, Apache Software Foundation, available online.
- [214] T. Maier, A. Binninger and R. O. Schaumann, “gossip-python”, Technical University of Munich, available online.
- [215] “Smudge”, Cornell University / Motivala, available online.
- [216] A. Farley, S. Hedetniemi, S. Mitchell and A. Proskurowski, “Minimum broadcast graphs”, Discrete Mathematics 25, 189–193 (1979).

- [217] S. Mitchell and S. Hedetniemi, “A census of minimum broadcast graphs”, *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences* 5, 141–151 (1980).
- [218] A.L. Liestman and S. Chau, “Constructing minimal broadcast networks”, *Journal of Combinatorics, Information and System Sciences* 11, 1–18 (1986).
- [219] D. Peleg, “Tight bounds on minimum broadcast graphs”, manuscript, 1987.
- [220] J.-C. Bermond and C. Peyrat, “Broadcasting in de Bruijn networks”, *Congressus Numerantium* 66, 283–293 (1988).
- [221] S. Pérennes, “Broadcasting and gossiping on de Bruijn, shuffle-exchange and similar networks”, Sophia-Antipolis, France, 1993.
- [222] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi and A.L. Liestman, “A survey of gossiping and broadcasting in communication networks”, *Networks* 18, 319–349 (1988).
- [223] A.L. Liestman and D.R. Richards, “Generalizations of broadcasting and gossiping”, *Networks* 18, 125–138 (1988).
- [224] K. Menger, “Zur allgemeinen Kurventheorie”, *Fundamenta Mathematicae* 10, 96–115 (1927).
- [225] W. Knödel, “New gossips and telephones”, *Discrete Mathematics* 13, 95 (1975).
- [226] G. Fertin and A. Raspaud, “A survey on Knödel graphs”, *Discrete Applied Mathematics* 137(2), 173–195 (2004).
- [227] G. Fertin and R. Labahn, “Compounding of gossip graphs”, *Networks* 36, 126–137 (2000).
- [228] K.A. Berman and M. Hawrylycz, “Telephone problems with failures”, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 7, 13–17 (1986).
- [229] R.W. Haddad, S. Roy and A.A. Schaffer, “On gossiping with faulty telephone lines”, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods* 8, 439–445 (1987).
- [230] Z. Hou and M. Shigeno, “New bounds on the minimum number of calls in failure-tolerant gossiping”, *Networks* 53, 35–38 (2009).

- [231] T. Hasunuma and H. Nagamochi, “Improved bounds for minimum fault-tolerant gossip graphs”, *Lecture Notes in Computer Science* 6986, 203–214 (2011).
- [232] A. Pelc, “Fault-tolerant broadcasting and gossiping in communication networks”, *Networks* 28(3), 143–156 (1996).
- [233] L. Gargano, “Tighter time bounds on fault-tolerant broadcasting and gossiping”, *Networks* 22, 469–486 (1992).
- [234] A.L. Liestman, “Fault-tolerant broadcast graphs”, *Networks* 15, 159–171 (1985).
- [235] L. Gargano and U. Vaccaro, “Minimum time networks tolerating a logarithmic number of faults”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 5, 178–198 (1992).
- [236] R. Ahlswede, L. Gargano, H. Haroutunian and L. Khachatrian, “Fault-tolerant minimum broadcast networks”, *Networks* 27, 293–307 (1996).
- [237] D. Peleg and A.A. Schaffer, “Time bounds on fault-tolerant broadcasting”, *Networks* 19, 803–822 (1989).
- [238] L. Khachatrian and H. Haroutunian, “On optimal broadcast graphs”, in *Proc. Fourth International Colloquium on Coding Theory, Armenia*, pp. 69–77 (1990).
- [239] V.H. Hovnanyan, “Gossiping Properties of the Modified Knödel Graphs”, *Mathematical Problems of Computer Science* 46, 126–131 (2016).
- [240] J.-C. Bermond, “Le problème des ouvriers (hypergraph gossip problem)”, in *Colloque CNRS: Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, pp. 31–34 (1976).
- [241] N. Cot, “Extensions of the telephone problem”, in *Proc. Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, Utilitas Mathematica, Winnipeg, 1976.
- [242] D. Kleitman and J. Shearer, “Further gossip problems”, *Discrete Mathematics* 30, 151–156 (1980).
- [243] R. Labahn, “The telephone problem for trees”, *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik* 22, 475–485 (1986).

- [244] P.J. Slater and R.C. Entringer, “Gossips and telegraphs”, *Journal of the Franklin Institute* 307, 353–360 (1979).
- [245] R. Ahlswede, H. Haroutunian and L. Khachatrian, “Messy broadcasting in networks”, in *Communications and Cryptography*, Vol. 276, pp. 13–26 (1994).
- [246] U. Bellur and N. C. Narendra, “Towards a programming model and middleware architecture for self-configuring systems”, in *Proc. 1st International Conference on Communication Systems Software & Middleware*, IEEE, 1–6 (2006).
- [247] G. Picard and P. Glize, “Model and analysis of local decision based on cooperative self-organization for problem solving”, *Multiagent and Grid Systems* 2(3), 253–265 (2006).
- [248] A.P. Engelbrecht, *Fundamentals of Computational Swarm Intelligence*, John Wiley & Sons, Chichester (2005).
- [249] L. Abdenebaoui, H.-J. Kreowski and S. Kuske, “Graph-transformational swarms with stationary members”, in *Technological Innovation for Cloud-Based Engineering Systems*, IFIP AICT 450, Springer, 137–144 (2015).
- [250] Z.A. Ali and H. Zhangang, “Multi-unmanned aerial vehicle swarm formation control using hybrid strategy”, *Transactions of the Institute of Measurement and Control* 43(12), 2689–2701 (2021).
- [251] M.R. Brust, G. Danoy, D. H. Stolfi and P. Bouvry, “Swarm-based counter UAV defense system”, *Discover Internet of Things* 1, Article 2 (2021).
- [252] Z.A. Ali, M. Shafiq and L. Farhi, “Formation control of multiple UAVs via decentralized control approach”, in *Proc. 2018 5th International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)*, IEEE, 61–64 (2018).
- [253] M. Monwar, O. Semiari and W. Saad, “Optimized path planning for inspection by unmanned aerial vehicles swarm with energy constraints”, in *Proc. 2018 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, IEEE, 1–6 (2018).
- [254] M. Shafiq, Z.A. Ali and E.H. Alkhamash, “A cluster-based hierarchical-approach for the path planning of swarm”, *Applied Sciences* 11(15), 6864 (2021).

- [255] R.C. Millar, L. Hashemi, A. Mahmoodi, R.W. Meyer and J. Laliberte, “Integrating unmanned and manned UAVs data network based on combined Bayesian belief network and multi-objective reinforcement learning algorithm”, *Drone Systems and Applications* 11, 1–17 (2023).
- [256] F. Javed, H.Z. Khan and R. Anjum, “Communication capacity maximization in drone swarms”, *Drone Systems and Applications* 11, 1–12 (2023).
- [257] H.B. Hassan, S.A. Barakat and Q.I. Sarhan, “Survey on serverless computing”, *Journal of Cloud Computing* 10, Article 39 (2021).
- [258] K. Senjab, S. Abbas, N. Ahmed and A.U.R. Khan, “A survey of Kubernetes scheduling algorithms”, *Journal of Cloud Computing* 12, Article 87 (2023).
- [259] F. Rehman, S. Gul, S. Aziz and M. H. Sajjad, “Cloud computing for UAV swarms”, in *Unmanned Aerial Vehicles Swarm for Protecting Smart Cities: Future Trends and Challenges*, Springer, 443–487 (2025).
- [260] I. Chandran and K. Vipin, “Network analysis of decentralized fault-tolerant UAV swarm coordination in critical missions”, *Drone Systems and Applications* 12, 1–15 (2024).
- [261] N.M. Gonzalez, T.C.M.B. Carvalho and C.C. Miers, “Cloud resource management: towards efficient execution of large-scale scientific applications and workflows on complex infrastructures”, *Journal of Cloud Computing* 6, Article 13 (2017).
- [262] T. Hai, J. Zhou, D. Jawawi, D. Wang, U. Oduah, C. Biamba and S.K. Jain, “Task scheduling in cloud environment: optimization, security prioritization and processor selection schemes”, *Journal of Cloud Computing* 12, Article 15 (2023).
- [263] S. Ferreira, J. Mendonça, B. Nogueira, W. Tiengo and E. Andrade, “Impacts of data consistency levels in cloud-based NoSQL for data-intensive applications”, *Journal of Cloud Computing* 13, Article 158 (2024).
- [264] A. Elouali, H. Mora Mora and F.J. Mora-Gimeno, “Data transmission reduction formalization for cloud offloading-based IoT systems”, *Journal of Cloud Computing* 12, Article 48 (2023).
- [265] E. Marin, D. Perino and R. Di Pietro, “Serverless computing: a security perspective”, *Journal of Cloud Computing* 11, Article 69 (2022).

- [266] V.S. Poghosyan, “Exact partition functions and Fisher zeroes for anisotropic spin and gauge Potts models”, *Journal of Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences)* 40(4), 235–238 (2005).
- [267] J.G. Brankov, V.I.V. Papoyan, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “The totally asymmetric exclusion process on a ring: Exact relaxation dynamics and associated model of clustering transition”, *Physica A* 368, 471–480 (2006).
- [268] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Determinant solution for the TASEP with particle-dependent hopping probabilities on a ring”, *Markov Processes Relat. Fields* 14, 233–254 (2008).
- [269] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “The relaxation dynamics of the TASEP with particle-dependent hopping probabilities on a ring”, *Rep. Math. Phys.* 61, 239–246 (2008).
- [270] V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Jamming probabilities for a vacancy in the dimer model”, *Phys. Rev. E* 77, 041130 (2008).
- [271] V.S. Poghosyan, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Pair correlations in the sandpile model: A check of logarithmic conformal field theory”, *Phys. Lett. B* 659, 768–772 (2008).
- [272] S.Y. Grigorev, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Three leg correlations in the two-component spanning tree on the upper half-plane”, *J. Stat. Mech.* P09008 (2009).
- [273] V.S. Poghosyan, S.Y. Grigorev, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Logarithmic two-point correlations in the Abelian sandpile model”, *J. Stat. Mech.* P07025 (2010).
- [274] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “The problem of predecessors on spanning trees”, *Acta Polytechnica* 51(1), 59–62 (2011).
- [275] V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Return probability for the loop-erased random walk and mean height in the Abelian sandpile model: a proof”, *J. Stat. Mech.* P10004 (2011).

- [276] Su.S. Poghosyan, V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Numerical study of correspondence between the dissipative and fixed-energy Abelian sandpile models”, *Phys. Rev. E* 84, 066119 (2011).
- [277] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Correlations in the $n \rightarrow 0$ limit of the dense $O(n)$ loop model”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46, 145002 (2013).
- [278] A. Gorsky, S. Nechaev, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “From elongated spanning trees to vicious random walks”, *Nucl. Phys. B* 870, 55–77 (2013).
- [279] J.G. Brankov, V.S. Poghosyan, V.B. Priezzhev and P. Ruelle, “Transfer matrix for spanning trees, webs and colored forests”, *J. Stat. Mech.* 499910 (2014).
- [280] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Euler tours and unicycles in the rotor-router model”, *J. Stat. Mech.* P06003 (2014).
- [281] VI.V. Papoyan, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “A loop reversibility and subdiffusion of the rotor-router walk”, *J. Phys. A: Math. Theor.* 48, 285203 (2015).
- [282] VI.V. Papoyan, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Spiral structures in the rotor-router walk”, *J. Stat. Mech.* 043207 (2016).
- [283] VI.V. Papoyan, V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Rotor-router walk on a semi-infinite cylinder”, *J. Stat. Mech.* 073209 (2016).
- [284] V.S. Poghosyan and V.B. Priezzhev, “Fundamental constants in the theory of two-dimensional uniform spanning trees”, *Theor. Math. Phys.* 187(3), 952–963 (2016).
- [285] V.H. Hovnanyan, Su.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Method of Local Interchange to Investigate Gossip Problems”, *Mathematical Problems of Computer Science* 40, 5–12 (2013).
- [286] V.H. Hovnanyan, Su.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Graph Plotter: A software tool for the investigation of fault-tolerant gossip graphs”, *IEEE CSIT, Revised Selected Papers* 1(5), 20–22 (2013).
- [287] V.H. Hovnanyan, Su.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “New methods of construction of fault-tolerant gossip graphs”, *IEEE CSIT, Revised Selected Papers* 1(5), 23–27 (2013).

- [288] V. Mnatsakanyan, N. Hovhannisyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Fault-tolerant gossiping in Knödel graphs”, 2025 5th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1-6, (2025).
- [289] V.H. Hovnanyan, S. S. Poghosyan and V. S. Poghosyan, “Fault-tolerant gossip graphs based on wheel graphs”, Mathematical Problems of Computer Science 42, 43–53 (2014).
- [290] V.H. Hovnanyan, Su.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Method of local interchange for the investigation of gossip problems: Part II”, Mathematical Problems of Computer Science 41, 15–22 (2014).
- [291] V.H. Hovnanyan, S.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Open problems in gossip/broadcast schemes and the possible application of the method of local interchange”, CSIT Proceedings, 66–70 (2015).
- [292] V.H. Hovnanyan, S.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Gossiping properties of the edge-permuted Knödel graphs”, CSIT Proceedings, 1–4 (2017).
- [293] H.E. Nahapetyan, Su.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “The investigation of models of self-organized systems by parallel programming methods based on the Abelian sandpile model”, CSIT Proceedings, 260–262 (2013).
- [294] H.E. Nahapetyan, S.S. Poghosyan, V.S. Poghosyan and Yu.H. Shoukourian, “The parallel simulation method for d-dimensional Abelian sandpile automata”, Mathematical Problems of Computer Science 46, 117–125 (2016).
- [295] H.R. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Frontal cellular automata for the study of non-equilibrium lattice models”, CSIT Proceedings, 44–46 (2015).
- [296] S.S. Poghosyan and V.S. Poghosyan, “Rumor spreading and invasion percolation”, Mathematical Problems of Computer Science 56, 30–42 (2019).
- [297] S. Poghosyan, V. Poghosyan, Y. Alaverdyan, “Tamper-Proof Hardware Solution and Algorithms for UAV Swarms Operating in Hostile Environments”, Proc. CSIT 2023, Yerevan (2023).
- [298] S. Poghosyan, V. Poghosyan, A. Lazyan, A. Atashyan, D. Hayrapetyan and H. Asatsryan, “Cloud-Based Self-Organizing UAV Swarm Simulation Platform”, Proc. CSIT 2023, Yerevan (2023).

- [299] V. Poghosyan, S. Poghosyan, A. Lazyan, A. Atashyan, D. Hayrapetyan, Y. Alaverdyan and H. Astsatryan, “Self-organizing multi-user UAV swarm simulation platform”, *Programming and Computer Software* 49(Suppl. 1), S7–S15 (2023).
- [300] S. Poghosyan, Y. Alaverdyan, V. Poghosyan, A. Lazyan, D. Hayrapetyan and Y. Shoukourian, “Algorithms for operating self-organizing swarms of UAVs implementing full exchange of information”, *AIP Conf. Proc.* 2757(1), 070003 (2023).
- [301] S. Poghosyan, Y. Alaverdyan, V. Poghosyan, S. Abrahamyan, A. Atashyan, H. Astsatryan and Y. Shoukourian, “Certain methods for investigating epidemics and preventing the spread of viruses in self-organizing systems”, *AIP Conf. Proc.* 2757(1), 070002 (2023).
- [302] S. Poghosyan, V. Poghosyan, S. Abrahamyan, A. Lazyan, H. Astsatryan, Y. Alaverdyan and K. Eguiazarian, “Cloud-based mathematical models for self-organizing swarms of UAVs: Design and analysis”, *Drone Systems and Applications* 12, 1–12 (2024).
- [303] A. Atashyan, A. Lazyan, D. Hayrapetyan, H. Astsatryan, V. Poghosyan, S. Poghosyan and Y. Shoukourian, “Mission preparation for self-organizing UAV swarms on a multi-user platform”, *Programming and Computer Software* 50(Suppl. 1), S39–S46 (2024).
- [304] A. Atashyan, A. Lazyan, D. Hayrapetyan and V. Poghosyan, “Implementation of an automata mechanism for a self-organizing swarm of drones platform”, *Mathematical Problems of Computer Science* 63, 71–80 (2025).
- [305] V.S. Poghosyan, “On exactly solvable lattice models and their mathematical properties”, *Mathematical Problems of Computer Science* 64, 9–16 (2025).
- [306] V.S. Poghosyan, “Lattice models of self-organized criticality and full information dissemination schemes: Applications in UAV swarm systems”, *Proceedings of NAS RA and SEUA: Technical Sciences* 77(4) 509-519 (2025).
- [307] V.S. Poghosyan, “Deterministic Area Coverage by UAV Swarms via Multi-Eulerian Rotor-Router Walks”, *Mathematical Problems of Computer Science* 65, 7-15 (2026).
- [308] V.S. Poghosyan, “A visualization and modeling tool for fault-tolerant gossip graphs”, *Mathematical Problems of Computer Science* 64, 29–36 (2025).

- [309] S. Poghosyan, V. Poghosyan, H. Astsatryan and Y. Alaverdyan, “Decentralized privacy provision in dynamically reconfigurable and self-organizing aero-physical cyber systems”, *Physics of Particles and Nuclei* 56(6), 1309–1317 (2025).
- [310] A. Atashyan, A. Lazyan, D. Hayrapetyan, V. Poghosyan and S. Poghosyan, “Algorithm-driven multi-user platform for decentralized coordination in self-organizing UAV swarms”, *Int. J. Electrical and Computer Engineering Research* 5(2), 7–13 (2025).
- [311] A. Lazyan, D. Hayrapetyan, S. Poghosyan, Y. Shoukourian and V. Poghosyan, “Algorithmic foundations for distributed task coordination in unmanned aerial vehicle swarms via a client–server system”, *Pattern Recognition and Image Analysis* 35(4), 901–906 (2025).
- [312] A. Atashyan, N. Aslanyan, V. Poghosyan and S. Poghosyan, “Vision-based hover stabilization of copter unmanned aerial vehicles using Raspberry Pi in the absence of global navigation satellite systems”, *Pattern Recognition and Image Analysis* 35(4), 893–900 (2025).
- [313] Y. Alaverdyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Multi-party computation for resilient coordination in self-organizing swarms”, *Proc. CSIT 2025, Yerevan* (2025).
- [314] A. Lazyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Real-time swarm behavior simulation and dynamic role assignment in decentralized UAV coordination platforms”, *Proc. CSIT 2025, Yerevan* (2025).
- [315] A. Atashyan, D. Hayrapetyan, V. Poghosyan and S. Poghosyan, “Mobility-aware graph restructuring and conflict minimizing modeling for autonomous continuous monitoring by self-organizing UAV swarms”, *Proc. CSIT 2025, Yerevan* (2025).
- [316] Y. Alaverdyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Confidential Computing in Edge-Cloud Hierarchy”, *Int. J. Computer Science & Information Technology* 15(3), 21–30 (2023).
- [317] Y. Alaverdyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Edge Computing: Data Sharing and Intelligence”, *Proc. 4th International Conference on Natural Language Processing and Machine Learning (NLPML 2023)*, *Computer Science & Information Technology* 13(8), 20–46 (2023).
- [318] Y. Alaverdyan, V. Poghosyan, S. Poghosyan and G. Alaverdyan, “Key distribution in dynamically reconfigurable and self-organizing aero-physical cyber systems”, 2025

- [319] A. Lazyan, S. Poghosyan, V. Poghosyan and S. Abrahamyan, “A multi-user software system for organizing and managing tasks for self-organizing UAV swarms”, 2025 5th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1-6, (2025).
- [320] A. Atashyan, D. Hayrapetyan, V. Poghosyan, S. Poghosyan, K. Egiazarian and Y. Shoukourian, “Dynamic Graph Restructuring, Continuous Monitoring, and Geo-Referenced Panorama Construction for Autonomous Self-Organized Unmanned Aerial Vehicle Swarms: Conflict-Minimizing Coordination”, *Pattern Recognit. Image Anal.* 36, 65–71 (2026).
- [321] A. Lazyan, S. Poghosyan, V. Poghosyan and S. Abrahamyan, “Adaptive Real-Time Simulation and Autonomous Role Reconfiguration for Decentralized Unmanned Aerial Vehicle Swarm Coordination”, *Pattern Recognit. Image Anal.* 36, 84–89 (2026).
- [322] Y. Alaverdyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Explainable and behavior-aware decision making in Self-Organizing Swarms”, *Programming and Computer Software* 52(2), 57-65 (2026).
- [323] Y. Alaverdyan, V. Poghosyan, S. Poghosyan and H. Astsatryan, “Anonymous computation scheme for robust authentication in self-organizing UAV swarms”, *Proc. Int. Conf. Mathematical Modelling and Computational Physics (MMCP 2024)* (2024).
- [324] A. Atashyan, A. Lazyan, D. Hayrapetyan, H. Astsatryan, V. Poghosyan and S. Poghosyan, “Cloud Infrastructure to Perform Distributed Multiuser Platform for Self-Organizing UAV Swarms”, *Tbilisi CSIT 2024 Proceedings, University of Georgia*, 9–12 (2024), doi:10.62343/csit.2024.3.
- [325] A. Lazyan, S. Poghosyan and V. Poghosyan, “Simulation-Driven Monitoring and Deviation Correction in a Multi-User Platform for Self-Organizing UAV Swarms”, 2026 6th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1–6, 2026.
- [326] A. Atashyan, D. Hayrapetyan and V. Poghosyan, “Deterministic and Conflict-Minimized Coverage and Metadata-Guided 2D Panorama Generation for Self-Organizing Unmanned Aerial Vehicle Swarms”, 2026 6th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1–8, 2026.

- [327] Y. Alaverdyan, S. Poghosyan, V. Poghosyan and A. Alaverdyan, “Quantum-Resistant Blockchain for Self-Organizing Cyber-Physical Swarms”, 2026 6th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1–6, 2026.
- [328] V. Mnatsakanyan, S. Poghosyan, V. Poghosyan and A. Atashyan, “Application of Optimal Fault-Tolerant Schemes in the Hardware-Software System of a Self-Organizing UAV Swarm”, 2026 6th International Conference on Electrical, Computer and Energy Technologies (ICECET), IEEE 1–5, 2026.

**ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ НЕРАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕТОЧНЫЕ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ И
СХЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИНФОРМАЦИИ В
САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ МНОГОАГЕНТНЫХ СИСТЕМАХ**

РЕЗЮМЕ

В диссертации представлены теоретические, алгоритмические и прикладные результаты, относящиеся к точно решаемым и неравновесным решеточным моделям, алгоритмам и схемам оптимального распространения информации в самоорганизующихся многоагентных системах. Совокупность полученных в диссертации результатов формирует единый математический и алгоритмический подход, объединяющий модели статистической механики, методы теории графов, численное моделирование и децентрализованное управление автономными роями БПЛА.

Получены новые результаты для ряда решеточных моделей статистической механики и связанных с ними комбинаторных структур. К таким моделям относятся модель Поттса, модель димеров, полностью асимметричный простой процесс исключения, абелева модель песчаной кучи, покрывающие деревья, случайные блуждания со стертыми циклами, $O(n)$ loop-модели и модель rotor-router. Для этих моделей выведены точные выражения для статистических сумм, производящих функций, корреляционных функций, вероятностей наблюдаемых величин, диффузионных характеристик, асимптотических соотношений и других фундаментальных величин.

Для моделей самоорганизованной критичности установлены нетривиальные связи между абелевой моделью песчаной кучи, покрывающими деревьями, моделями димеров, случайными блужданиями со стертыми циклами и динамикой rotor-router. Эти связи позволили вычислить и интерпретировать ряд нелокальных характеристик критических систем, включая величины, связанные с рекуррентными конфигурациями, дальними корреляциями и детерминированными аналогами случайных блужданий. Полученные результаты уточняют механизм возникновения глобально упорядоченных структур и критического поведения из простых локальных динамических правил.

Для модели rotor-router получены новые результаты об эйлеровых и мультиэйлеровых блужданиях. В частности, доказана теорема об обратимости циклов, а также описана структура траекторий частицы и их субдиффузионное поведение. Эти результаты формируют теоретическую основу для детерминированных, воспроизводимых и сбалансированных алгоритмов покрытия графов.

В области оптимальных схем полного обмена информацией в сетях получены новые конструкции и оценки в рамках задач gossip и broadcast для числа звонков, времени распространения информации, числа используемых каналов связи и отказоустойчивости при частичных отказах связей или узлов. Особое внимание уделено графам Кнёделя, возрастающим путям, схемам типа NOHO, минимальным gossip-графам и k -

отказоустойчивым gossip-схемам. Для помеченных gossip-графов введен и развит метод локальной перестановки, который позволяет выполнять локальные преобразования коммуникационных графов с сохранением свойства полного распространения информации. Он использован для построения новых gossip-схем, анализа структур типа графов Кнёделя, получения альтернативных доказательств известных результатов и обобщения оптимальных и отказоустойчивых схем распространения информации. В качестве практического результата работ по gossip-графам разработан программный инструмент Graph Plotter. Инструмент позволяет строить, визуализировать, редактировать и анализировать gossip-графы, проверять полное распространение информации, оценивать свойства отказоустойчивости и выполнять операции локальной перестановки. Он предоставляет вычислительную среду для поиска и проверки новых оптимальных или близких к оптимальным коммуникационных структур.

Теоретические результаты по динамике rotor-router и gossip-схемам перенесены на задачи проектирования самоорганизующихся многоагентных систем. Разработан единый подход, в котором правила rotor-router используются для детерминированного покрытия территории, а схемы gossip и broadcast — для надежного обмена информацией внутри роя. Этот подход создает теоретико-графовую основу для координации децентрализованных БПЛА при ограниченной связи, изменяющейся топологии сети и возможных отказах.

Разработана и реализована облачная многопользовательская платформа для моделирования и управления самоорганизующимися роями БПЛА. Платформа объединяет проектирование миссии, построение графов миссии, предварительную проверку, моделирование, мониторинг телеметрии в реальном времени, обнаружение отклонений и постмиссионный анализ данных. Она связывает математические модели и алгоритмы с программными компонентами, необходимыми для экспериментальных и практических роевых миссий.

Созданы и испытаны также программно-аппаратные решения для роев БПЛА. Экспериментальные системы, состоящие сначала из четырех БПЛА, а затем из десяти квадрокоптеров, использованы для проверки применимости предложенных моделей, алгоритмов и компонентов платформы в условиях, близких к реальным. Эти реализации демонстрируют применимость детерминированного покрытия, децентрализованного распределения задач, надежного обмена информацией и управления миссией на основе телеметрии.

Практическая значимость диссертации заключается в возможности использования разработанных методов, алгоритмов и программных инструментов в распределенных вычислительных системах, коммуникационных сетях, сенсорных сетях и автономных многоагентных системах. Предложенные подходы могут применяться для мониторинга, разведки, картографирования, поисковых работ, надежной коммуникации, защищенного обмена данными и облачного планирования миссий. Таким образом, диссертация доводит фундаментальные модели статистической механики и теории графов до алгоритмического и прикладного уровня, формируя целостный подход к проектированию самоорганизующихся децентрализованных систем.

Vahagn S. Poghosyan

**EXACTLY SOLVABLE NON-EQUILIBRIUM LATTICE MODELS, ALGORITHMS, AND
SCHEMES FOR OPTIMAL INFORMATION DISSEMINATION IN SELF-ORGANIZING
MULTI-AGENT SYSTEMS**

ABSTRACT

The thesis presents theoretical, algorithmic, and applied results on exactly solvable and non-equilibrium lattice models, algorithms, and schemes for optimal information dissemination in self-organizing multi-agent systems. The range of results obtained in the thesis forms a unified mathematical and algorithmic approach that brings together models of statistical mechanics, methods of graph theory, numerical simulation, and decentralized control of autonomous UAV swarms.

New results have been obtained for a number of lattice models of statistical mechanics and related combinatorial structures. These models include the Potts model, the dimer model, the totally asymmetric simple exclusion process, the Abelian sandpile model, spanning trees, loop-erased random walks, $O(n)$ loop models, and the rotor-router model. For these models, exact expressions have been derived for partition functions, generating functions, correlation functions, probabilities of observable quantities, diffusion characteristics, asymptotic relations, and other fundamental quantities.

For models of self-organized criticality, non-trivial connections have been established between the Abelian sandpile model, spanning trees, dimer models, loop-erased random walks, and rotor-router dynamics. These connections have made it possible to compute and interpret several non-local characteristics of critical systems, including quantities related to recurrent configurations, long-range correlations, and deterministic analogues of random walks. The obtained results clarify how global ordered structures and critical behavior can arise from simple local dynamical rules.

For the rotor-router model, new results have been obtained on Eulerian and multi-Eulerian walks. In particular, the cycle reversibility theorem has been proved, and the structure of particle trajectories and their subdiffusive behavior has been described. These results form a theoretical basis for deterministic, reproducible, and balanced coverage algorithms on graphs.

In the area of optimal schemes for complete information exchange in networks, within the framework of gossip and broadcast problems, new constructions and estimates have been obtained for the number of calls, dissemination time, number of communication links, and fault-tolerance under partial link or node failures. Special attention has been given to Knödel graphs, increasing paths, NOHO-type schemes, minimum gossip graphs, and k -fault-tolerant gossip schemes. A local interchange method has been introduced and developed for labeled gossip graphs, which makes it possible to transform communication graphs locally while

preserving the property of complete information dissemination. It has been used to construct new gossip schemes, to analyze Knödel-type structures, to obtain alternative proofs of known results, and to extend optimal and fault-tolerant information dissemination schemes. The Graph Plotter software tool has been developed as a practical result of the work on gossip graphs. The tool allows one to construct, visualize, edit, and analyze gossip graphs, to verify complete information dissemination, to check fault-tolerance properties, and to perform local interchange operations. It provides a computational environment for searching and testing new optimal or near-optimal communication structures.

The theoretical results on rotor-router dynamics and gossip schemes have been transferred to the design of self-organizing multi-agent systems. A unified approach has been developed in which rotor-router rules are used for deterministic area coverage, while gossip and broadcast schemes are used for reliable information exchange inside the swarm. This approach provides a graph-theoretic basis for coordinating decentralized UAVs under limited communication, changing network topology, and possible failures.

A cloud-based multi-user platform for modeling and controlling self-organizing UAV swarms has been developed and implemented. The platform integrates mission design, construction of mission graphs, preliminary verification, simulation, real-time telemetry monitoring, deviation detection, and post-mission data analysis. It connects mathematical models and algorithms with software components needed for experimental and practical swarm missions.

Software and hardware solutions for UAV swarms have also been created and tested. Experimental systems consisting first of four UAVs and later of ten quadcopters have been used to verify the applicability of the proposed models, algorithms, and platform components in realistic conditions. These implementations demonstrate the applicability of deterministic coverage, decentralized task distribution, reliable information exchange, and telemetry-based mission control.

The applied significance of the thesis lies in the possibility of using the developed methods, algorithms, and software tools in distributed computing systems, communication networks, sensor networks, and autonomous multi-agent systems. The proposed approaches can be applied to monitoring, reconnaissance, mapping, search operations, reliable communication, secure data exchange, and cloud-based mission planning. Thus, the thesis brings fundamental models of statistical mechanics and graph theory to an algorithmic and applied level, forming a complete approach to the design of self-organizing decentralized systems.